

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

А. Н. Панченков

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
ПРЕДЕЛЬНОЙ
КОРРЕКТНОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
СИБИРСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. Н. Панченков

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
ПРЕДЕЛЬНОЙ
КОРРЕКТНОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1976

Основы теории предельной корректности. Панченков А. Н. М., «Наука», 1976, 240 с.

В монографии содержится классификация шкал сравнения, по которым возможны асимптотические разложения, вводятся классы и уровни предельной корректности, подробно изучается связь предельной корректности с корректностью постановки задач по Адамару и Тихонову.

Основные результаты теории предельной корректности в совокупности с методом функциональных параметров дают эффективный аппарат для изучения современных проблем прикладной математики.

Подробно рассматриваются прикладные проблемы физики, механики, теории оптимального управления. В качестве основного рабочего аппарата обычно используется метод функциональных параметров.

В книге также содержатся материалы по вычислительной эффективности асимптотических алгоритмов и их реализации на ЭВМ, рассматриваются задача «полной аппроксимации» и связанная с ней проблема построения усеченных асимптотических алгоритмов.

Монография рассчитана на специалистов в области прикладной математики и механики, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Илл. 4. Табл. 10. Библиогр. 110 назв.

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор В. С. ТКАЛИЧ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время можно выделить три характерные особенности асимптотического анализа:

1. При построении асимптотических решений достаточно сложных и содержательных задач рассматриваются две математические модели: общая математическая модель описывает поведение системы при произвольных значениях параметра, предельная модель — при предельных значениях параметра.

2. В сложных конкретных проблемах стала уже правилом ситуация, при которой явления «сингулярных возмущений», различного рода «некорректностей» оказались типичными при применении асимптотических методов к их изучению.

3. Опыт развития асимптотических методов в различных научных направлениях привел к тому, что сейчас существует большое число интересных и достаточно эффективных асимптотических методов; однако не выработаны концепции, на основе которых можно создать теорию асимптотических методов.

Явления «сингулярных возмущений», «некорректности» достаточно хорошо и подробно изучены в литературе. По существу анализ этих явлений был начат одновременно с развитием асимптотических методов, так что мы имеем богатейший «экспериментальный» материал, на основе которого можно сделать необходимые обобщения при развитии теории асимптотических методов.

Идеи согласования математических моделей также зарождались в рамках различных научных направлений. В ряде случаев они играли важную роль, иногда задача согласования решалась почти тривиально, иногда для этого требовались значительные творческие усилия исследователей, в результате которых были получены фундаментальные теоремы (например, теоремы А. Пуанкаре, И. Г. Малкина, Н. Н. Боголюбова).

Анализ результатов исследований по согласованию математических моделей привел автора к выводу о том, что идея согласования является одной из главных в асимптотическом анализе и ее можно принять в качестве основной при развитии теории асимптотических методов. Естественным образом это приводит к понятиям о предельной корректности или некорректности в той или иной проблеме.

Для некоторого класса задач эти понятия в определенной мере адекватны более известным понятиям о регулярных и сингулярных возмущениях. Но понятие предельной корректности более общее и конструктивное, особенно в связи с активизацией исследований по некорректным задачам математической физики. Десятилетний опыт работы автора с асимптотическими методами показал, что частные идеи и концепции предельной корректности оказываются очень удобными при рассмотрении конкретных задач. Наиболее ярко это проявляется в задачах гидродинамики подводного крыла и теории потенциала ускорений.

В настоящей монографии была предпринята попытка разработать основы теории асимптотических методов, базирующихся на идеях предельной корректности. При этом автор оказался в трудных условиях, поскольку требование непротиворечивости этой теории и многочисленного фактического материала по асимптотическим методам определило те границы, в которых должна находиться эта теория. В процессе работы выяснилось, что в пределах этой книги можно говорить только об основах такой теории и о рациональности тех или иных общих конструкций. В связи с этим большое место в книге занимают вопросы приложения общей теории предельной корректности, а собственно самой теории посвящены главы 1—6 (см. также заключение).

Некоторые широко известные асимптотические методы с позиций излагаемой теории рассмотрены в главах 10—12.

Главы 7, 9 и в некоторой степени глава 5 содержат материалы по теории корректности в приложении к задачам теории оптимального управления и теории крыла в нестационарном потоке. Изучение этих материалов без предварительного ознакомления с теорией оптимального управления и теорией потенциала ускорений будет затруднительным. Поэтому читателю следует обратиться к монографической литературе, в частности сведения по теории потенциала ускорений можно почерпнуть из нашей монографии «Теория потенциала ускорений» [63].

Отметим, что обозначения, используемые при рассмотрении конкретных задач гидродинамики, соответствуют основным обозначениям настоящей монографии и специально не оговариваются.

В книге, как правило, приведены наиболее характерные конкретные классические примеры, а также примеры, связанные с исследованиями автора и его сотрудников. Следует обратить внимание на то, что при изложении материалов по известным асимптотическим методам автор ни в коей мере не претендовал на энциклопедичность и полноту, поскольку эти задачи в рамках одной монографии не могут быть освещены достаточно полно и целесообразность подобной постановки неочевидна в связи с обилием литературы (в том числе монографической), посвященной отдельным методам. Исключение сделано только для мето-

да функциональных параметров, по которому в настоящей работе содержатся наиболее полные сведения.

Рассматривая подробно все материалы книги, следует заметить, что, по нашему мнению, идеи и концепции теории предельной корректности обладают всеми нужными качествами, необходимыми для развития общей теории асимптотических методов. Но надо иметь в виду, что мнение автора не может быть до конца объективным и окончательное суждение должен вынести читатель.

Материалы монографии достаточно подробно, в течение 1970—1972 гг., обсуждались на Иркутском городском семинаре по асимптотическим методам в теории систем. Основные разделы были изложены студентам математического факультета Иркутского государственного университета.

В главах 6 и 7 настоящей монографии § 6.4, 6.5 и 7.11, 7.12 написаны В. И. Нещеретом, § 7.9 — автором совместно с В. И. Нещеретом.

При подготовке этой книги большую помощь оказали сотрудники лаборатории теории динамических систем Сибирского энергетического института СО АН СССР, кафедры механики Иркутского государственного университета и кафедры асимптотических методов, за что автор им очень признателен.

Автор считает также своим приятным долгом поблагодарить профессора В. С. Ткалича, сделавшего ряд полезных замечаний при редактировании рукописи.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R^n	— n -мерное евклидово пространство	$\{\varepsilon^\alpha\}$	— шкала сравнения метода пространства малого времени
$\Omega \in R^n$	— область n -мерного евклидова пространства	$\{\tau^\alpha\}$	— шкала сравнения метода функциональных параметров
$E(\Omega)$	— пространство состояний системы	$\{\tau_\beta\}$	— спектральная шкала оператора \bar{A}
$C^n(\Omega)$	— пространство функций, непрерывных вместе со своими n производными	$\{\tau_{\beta\gamma}\}$	— расширенная спектральная шкала оператора \bar{A}
$C_0^n(\Omega)$	— пространство финитных функций, имеющих n производных	S	— система первого уровня корректности
$L_p(S)$	— пространство интегрируемых с p степенью функций	\hat{S}	— система второго уровня корректности
$H(\Omega)$	— гильбертово пространство	K_1	— регулярный класс корректности
a_0^0	— класс функций, ограниченных на концах интервала $(-1 \div +1)$	K_2	— терминальный класс корректности
a_0^∞, a_∞^0	— класс функций, ограниченных на одном конце и не ограниченных на другом конце интервала $(-1 \div +1)$	$L(\varepsilon)$	— оператор эволюции системы
a_∞^∞	— класс функций, не ограниченных на концах интервала $(-1 \div +1)$	$D(\tau)$	— конус операторов эволюции
ε	— физический параметр (параметр возмущения)	P	— регуляризирующий оператор (оператор деформации в задаче полной аппроксимации)
\bar{A}	— обобщенный оператор параболической системы	\mathcal{G}	— точки n -мерного евклидова пространства Ω
		$T\Phi$	— обобщенный оператор математической модели
		$T_0\Phi_0$	— обобщенный оператор

	предельной математической модели	x_{np}, u_{np}	— коэффициенты двойного разложения x, u
$I \subseteq [0 + \infty)$	— временной интервал (полусегмент)	D_n	— коэффициенты разложения общего функционала
$I_1 \subseteq [0 + 1)$	— временной интервал пространства малого времени	L	— число членов разложения
\bar{P}	— пространство отображений	x^i	— i -я компонента вектора x
$\tau = \Pi t (\Pi \in \bar{P})$	— функциональный параметр малого времени	u^j	— j -я компонента вектора u
τ_T	— предельное значение функционального параметра	$\varphi \in E(\Omega)$	— вектор пространства состояний (потенциал скоростей)
q	— параметр отображения в методе пространства малого времени	θ	— потенциал ускорений
M	— параметрическое пространство	N_0	— отображение $\theta \rightarrow \varphi$ в стационарных задачах
$\mathcal{Z}(M)$	— шкала сравнения, заданная над параметрическим пространством	N	— отображение $\theta \rightarrow \varphi$ в нестационарных задачах
$x \in E(\Omega) (\Omega \subset \mathbb{C}R)$	— вектор пространства состояний	S	— поверхность в n -мерном евклидовом пространстве
\bar{U}	— пространство управлений в системе управления	S_p	— проекция несущей поверхности на поверхность невозмущенного потока
$u \in \bar{U}$	— вектор управления	p	— точка на S_p
$\Phi(\tau_T)$	— общий функционал	$\{A_y, A_x\}$	— интегральные операторы типа потенциалов
$\Psi(x, t)$	— критерий качества оптимальной системы управления	Δ	— оператор Лапласа
$W(u, x, t)$	— функция ошибки оптимальной системы управления	$\Delta_M = \Delta - M_\infty^2 \cdot \partial^2 / \partial x^2$	— оператор газовой динамики
N	— размерность вектора x	V_0	— скорость набегающего потока
K	— размерность вектора u	C	— скорость звука
A	— матрица $(N \times N)$ линейной системы	$M_\infty = V_0 / C$	— число Маха невозмущенного потока
C	— матрица $(N \times K)$ коэффициентов при управлении	$[F] = F_+ - F_-$	— скачок функции F на поверхности S_p
x_n, u_n	— коэффициенты разложения векторов x, u в пространстве малого времени	C_y	— коэффициент подъемной силы крыла
		C_x	— коэффициент сопротивления крыла
		C_{xi}	— коэффициент индуктивного сопротивления крыла

C_m	— коэффициент момента крыла		метр погружения (отстояния)
C_p	— местный коэффициент давления	$a_\infty = dC_y/d\alpha$	— угловой коэффициент зависимости $C_y = f(\alpha)$ крыла бесконечного размаха в безграничном потоке
$\Gamma(y)$	— циркуляция крыла в сечении y		
α	— угол атаки крыла		
α_0	— угол нулевой подъемной силы крыла	a_h	— угловой коэффициент зависимости $C_{yh} = f(\alpha)$ крыла в ограниченном потоке
a	— полухорда крыла	$\Psi = a_h/a_\infty$	— функция, учитывающая влияние ограничения потока на угловой коэффициент зависимости $C_y = f(\alpha)$
b	— полуразмах крыла		
λ_0	— относительное удлинение крыла	ζ	— функция, учитывающая влияние конечности размаха на характеристики крыла в ограниченном потоке
δ	— толщина крыла		
$\bar{\delta}$	— относительная толщина крыла		
$\Delta\alpha_i$	— угол скоса потока		
h	— погружение крыла (отстояние крыла от экрана)		
$\bar{h} = h/2a$	— относительное отстояние крыла	Fr	— число Фруда
$\tau = \sqrt{4\bar{h}^2 + 1} - 2\bar{h}$	— функциональный пара-	ρ	— плотность жидкости
		P	— давление в потоке

ВВЕДЕНИЕ

1. Интересные примеры

При изучении задач физики, нелинейной механики, механики жидкости и газа асимптотическими методами наиболее прямолинейным представлялся поиск решения в виде асимптотического разложения

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \dots + O(\varepsilon^n). \quad (1)$$

Однако при реализации формализма асимптотического решения (1) в конкретных проблемах встретилось большое число феноменов, анализ которых привел или к полному отказу от попыток построения подобных решений, или к развитию новых специализированных асимптотических методов, приспособленных к определенному классу задач.

Рассмотрим несколько простых характерных примеров, в которых четко видно существо феноменов.

1. *Задача Коши для системы с периодическими решениями:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, & \dot{y} &= x + x^3; \\ x &= \varepsilon|_{t=0}, & y &= 0|_{t=0}; \quad t \in [0 \div \infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система является системой Ляпунова, и в ней должны существовать периодические решения [52].

Будем искать периодические решения в задаче асимптотическим методом. Пусть решения имеют вид рядов:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^N \varepsilon^n x_n(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ y(t) &= \sum_{n=1}^N \varepsilon^n y_n(t) + O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned}$$

Обычным путем получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1, & \dot{y}_1 &= x_1; \\ \dot{x}_2 &= -y_2, & \dot{y}_2 &= x_2; \\ \dot{x}_3 &= -y_3, & \dot{y}_3 &= x_3 + x_1^3. \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_1 = 1|_{t=0}, \quad y_1 = 0|_{t=0}, \quad x_i = y_i = 0|_{t=0},$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos t, & y_1 &= \sin t; \\ x_2 &= 0, & y_2 &= 0; \\ \dot{x}_3 &= -y_3, & \dot{y}_3 &= x_3 + \cos^3 t, \end{aligned}$$

далее

$$\ddot{x}_3 + x_3 = \cos^3 t. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$x_3 = A \cos t + B \sin t + \frac{3}{8}t \sin t - \frac{1}{9} \cos 3t.$$

Вместо ожидаемых периодических решений мы уже в третьем приближении получили член (вековой) $t \sin t$, который искажает периодическое решение x_3 .

Таким образом, асимптотический метод, примененный в задаче (2), не позволяет получить равномерное приближение на большом интервале времени. Этот недостаток исправляют методы Ляпунова [52] и усреднения [47].

Появление вековых членов вызвано тем, что в исходной задаче период нелинейных колебаний T зависит от параметра ϵ и при $\epsilon \rightarrow 0$ $T \rightarrow T_0 = 2\pi$. Если сделать замену $t = \tau T / 2\pi$, то по переменной τ период колебаний не будет зависеть от ϵ . Тогда на основе формализма метода Ляпунова можно получить периодические решения задачи (2).

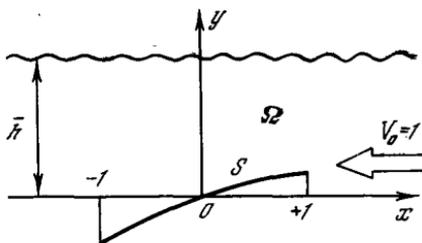


Рис. 1

2. *Задача о подводном крыле.* Плоская задача о тонком крыле под свободной поверхностью при больших числах Фруда (рис. 1) редуцируется к интегральному уравнению [62]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) \left[\frac{1}{x-s} + \frac{x-s}{(x-s)^2 + 4e^2} \right] ds = F(x), \quad x \in [-1 \div 1].$$

В связи с решением проблемы движения судов на малопогруженных подводных крыльях для приложений была необходима информация о поведении крыла при малых ϵ (здесь

$\varepsilon = 2\bar{h}$, \bar{h} — относительное погружение крыла). Естественный для этой ситуации путь — поиск решения в виде ряда

$$\gamma(s) = \gamma_0(s) + \varepsilon^2 \gamma_1(s) + \varepsilon^4 \gamma_2(s) + \dots + O(\varepsilon^N)$$

— оказался нереализуемым.

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев построили асимптотическое решение в виде (см. [62])

$$\gamma(s) = \gamma_\infty(s) + \frac{1}{\varepsilon} \gamma_1(s) + \frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_2(s) + \dots + O\left(\frac{1}{\varepsilon^N}\right).$$

Это решение оказалось пригодным для больших значений ε , в то время как для приложений необходимо было решение для малых ε .

В этом примере четко просматривается типичная ситуация: в области значений параметра, интересной для приложений, нет регулярных асимптотических разложений, а область их существования не представляет особого интереса. Именно эта задача и послужила одним из стимулов для развития метода функциональных параметров в гидродинамике подводного крыла [62].

Нами введен в рассмотрение функциональный параметр

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_1^2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon}$$

и построено решение в виде ряда

$$\gamma(s) = \gamma_\infty(s) + \tau^2 \gamma_1(s) + \tau^4 \gamma_2(s) + \dots + O(\tau^M).$$

Очень интересным оказалось сопоставление этого решения с решением М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [33]. Для относительной подъемной силы тонкой пластинки при числе Фруда $Fr \rightarrow \infty$ ими была выведена формула

$$\Psi = 1 - \frac{1}{16\bar{h}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{h}^3}\right). \quad (5)$$

В первом приближении в работе [62] получено

$$\Psi = 1 - \frac{1}{2} \tau^2 + O(\tau^3). \quad (6)$$

При больших погружениях крыла $\tau \rightarrow 1/2\sqrt{2} \bar{h}$ и формула (5) переходит в (6). Но результат (6) хорошо соответствовал экспериментальным данным при произвольных \bar{h} , а при $\bar{h} \rightarrow 0$ давал точное значение $\Psi = 1/2$, соответствующее глиссированию пластинки.

3. *Задача о движении плоского эллиптического контура в идеальной несжимаемой жидкости.* Формулировка этой задачи (рис. 2) для произвольных возмущений имеет вид [63]:

$$\Delta \varphi = 0, \quad g \in \Omega;$$

$$\frac{\varphi_y}{1 + \varphi_x} = F(x), \quad g \in S; \quad \nabla \varphi \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$F(x) = \pm \varepsilon T'(x), \quad g \in S_{\pm},$$

$$T(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

В точном ее решении получено значение вызванной скорости [22]

$$\varphi_x = \varepsilon / [\sqrt{1 + \varepsilon^2 x^2 / (1 - x^2)}]. \quad (7)$$

В теории малых возмущений имеем краевую задачу:

$$\Delta \varphi_0 = 0, \quad g \in \Omega;$$

$$\varphi_{0y} = F(x), \quad g \in S_p;$$

$$\nabla \varphi_0 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Решение этой задачи запишем в виде

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g(s) \ln \sqrt{(x-s)^2 + y^2} ds, \quad g(s) = 2\varepsilon T'(s),$$

откуда $\varphi_{0x} = \varepsilon$.

Из (7) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области $|x| \in [0 \div 1 - \varepsilon^\alpha]$, $\alpha < 1/2$, существует асимптотическое представление

$$\varphi_x = \varphi_{0x} + O(\varepsilon^{2(1-\alpha)}).$$

В области же $|x| \in [1 - \varepsilon^\alpha \div 1)$ имеется значительное расхождение между точным и асимптотическим решениями теории малых возмущений.

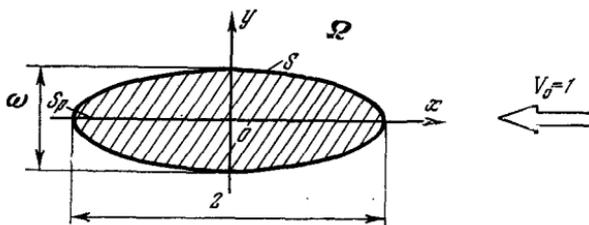


Рис. 2

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\varphi_x \rightarrow \varphi_{0x}$, $|x| \in [0 \div 1 - \varepsilon^\alpha]$ и $\varphi_x \neq \varphi_{0x}$, $|x| \in [1 - \varepsilon^\alpha \div 1)$.

Формальное разложение выражения (7) имеет вид

$$\varphi_x = \varphi_{0x} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{3}{8} \varepsilon^4 \frac{x^4}{(1-x^2)^2} + \dots \quad (8)$$

В области $x \in [1 - \varepsilon^\alpha \div 1)$ существует подобласть $|x| \in [1 - \varepsilon^\beta \div 1]$, $\beta > 1/2$, для которой справедлива оценка $(1-x^2) \in$

$\in O(\varepsilon^{2\beta})$. Для решения φ в этой подобласти имеем

$$\varphi_x = \varphi_{0x} + \frac{1}{O(\varepsilon^{2-2\beta})} + \frac{1}{O(\varepsilon^{4-4\beta})},$$

но $(2-2\beta) < 1$, и решение (8) будет расходиться.

4. *Задача Коши и начально-краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности.* Рассмотрим две задачи для линейного одномерного уравнения теплопроводности:

$$1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{xx}, \quad \varphi \in C^\infty(-\infty \div \infty); \quad \varphi = \varphi_0|_{t=0};$$

$$2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{xx}, \quad \varphi \in C^\infty(0 \div 1);$$

$$\varphi = \varphi_0|_{t=0}, \quad \varphi_x = 0|_{x=0}, \quad \varphi_x = -\varphi|_{x=1}.$$

Будем искать асимптотические решения этих задач в виде рядов

$$\varphi = \varphi_0 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + t^3\varphi_3 + \dots + O(t^N). \quad (9)$$

В силу уравнения для φ_n получаем рекуррентную формулу

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \varphi_{(n-1)xx}.$$

Как следует из этой формулы, в задаче Коши не возникает никаких препятствий в построении решений вида (9), однако для начально-краевой задачи ситуация оказывается иной.

Ряд (9) должен также удовлетворять граничным условиям, что приводит к необходимости выполнения условия

$$\varphi_{nx} = -\varphi_n|_{x=1}.$$

Ясно, что для произвольных начальных данных φ_0 это условие выполняться не будет, а асимптотическое решение начально-краевой задачи 2 с произвольными начальными данными построить в классе $C^\infty(0 \div 1)$ нельзя. Для некоторых специальным образом подобранных функций φ_0 это решение существует, но для более общих уравнений параболического типа задача выбора специальных начальных данных φ_0 , обеспечивающих решения вида (9), оказывается не проще построения самого решения.

5. *Несущая поверхность в безграничной жидкости.* С точки зрения изучения особых случаев интересна задача о крыле конечного размаха в безграничной жидкости.

Задача о движении тонкой несущей поверхности в безграничной жидкости сводится к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\rho)}{(y-\eta)} \left[1 - \frac{V(x-\xi)^2 + \lambda^2(\eta)(y-\eta)^2}{r-\xi} \right] d\xi d\eta = -F(g),$$

$$g \in S_p. \quad (10)$$

Это уравнение было предметом многочисленных исследований, но еще не получило замкнутого решения.

Для приложений наибольший интерес представляют большие удлинения крыла ($\lambda \geq 4$), в связи с чем заманчиво построение асимптотического решения в виде ряда по степеням $1/\lambda$, нулевым приближением которого является плоская задача. Анализ уравнения (10) показал, что регулярная асимптотика для больших λ здесь не существует и задача относится к классу задач с сингулярными возмущениями.

Сингулярные возмущения обязаны радикалу

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + \lambda^2 (\eta) (y-\eta)^2}$$

в ядре интегрального уравнения. Если принять аппроксимацию радикала

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + \lambda^2 (\eta) (y-\eta)^2} \simeq \lambda (\eta) |y-\eta|,$$

то из (10) легко восстановить известное уравнение Прандтля для распределения циркуляции по размаху крыла большого удлинения

$$\Gamma(y) = \frac{a_\infty}{2\lambda(y)} \left[\alpha(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Gamma'(\eta)}{y-\eta} d\eta \right].$$

Принятая аппроксимация пригодна в областях, где выполняется условие $\lambda(\eta) \left| \frac{y-\eta}{x-\xi} \right| \gg 1$; однако на несущей поверхности существуют подвижные области, в которых $|y-\eta| \sim O(1/\lambda)$ и аппроксимация не выполняется. При $\lambda \rightarrow 0$ уравнение (10) переходит в

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_\eta(\eta, x)}{(y-\eta)} d\eta = F(x, y), \quad \Phi(x, y) = \int_x^1 \gamma(\rho) d\xi, \quad (11)$$

и можно построить регулярное асимптотическое решение, в котором нулевым приближением будет решение уравнения (11) [63, 64].

6. Течение вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Рассмотрим задачу об обтекании пластинки вязкой жидкостью

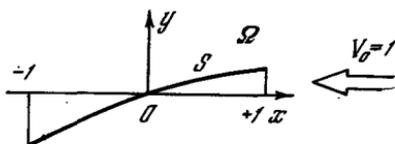


Рис. 3

(рис. 3). Для безразмерной функции тока Ψ задача может быть сформулирована в виде [22]:

$$\left(\Psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \Psi_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi = 0, \quad (12)$$

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi_y(x, 0) = 0, \quad x \in [0 \div 1];$$

$$\psi(x, y) \rightarrow y, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Рассмотрим возможность построения регулярного асимптотического решения. При $Re \rightarrow \infty$ дифференциальное уравнение переходит в уравнение

$$\left[\psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y} \right] \nabla^2 \psi = 0,$$

и вырожденная задача оказывается неверно сформулированной, поскольку при предельном переходе $Re \rightarrow \infty$ понизился порядок дифференциального уравнения и одно из граничных условий оказалось лишним. Для исправления этого дефекта необходимо выбросить граничное условие $\psi_y(x, 0) = 0$, но полученная при этом краевая задача уже будет описывать движение идеальной жидкости.

Граничное условие $\psi_y(x, 0) = 0$ определяет физическое условие «прилипания» жидкости к поверхности пластинки, и решение задачи для идеальной жидкости не будет равномерно пригодным. В тонком пограничном слое реализуется течение, описываемое другой математической моделью. Для получения этой модели необходимо ввести преобразование координаты, $y, \bar{y} = Re^{1/2}y$. Внося это преобразование в дифференциальное уравнение при $Re \rightarrow \infty$, получим уравнение пограничного слоя

$$\psi_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}} + \psi_x \psi_{\bar{y}\bar{y}} - \psi_{\bar{y}} \psi_{x\bar{y}} = f(x).$$

Характерной особенностью этого примера является то, что общая математическая модель течения при $Re \rightarrow \infty$ вырождается в две модели, описывающие внешний поток и течение внутри пограничного слоя. Отметим, что это обстоятельство сыграло выдающуюся роль в механике жидкости и газа, поскольку разделение общей модели на две определило независимое развитие двух наиболее интересных разделов — гидродинамики идеальной жидкости и теории пограничного слоя.

Рассмотренный пример относится к задачам для дифференциальных уравнений математической физики с малым параметром при старшей производной.

2. Содержательная логика монографии.

Общие замечания

Обилие асимптотических методов и различные сферы их приложения чрезвычайно затрудняют развитие единой теории асимптотических методов. Эти трудности существенно возрастают с постановкой вопроса об уровне общности и ценности подобной теории. Поскольку речь идет о рабочем аппарате математика при изучении конкретных прикладных проблем, излиш-

няя общность может быть недостаточно полезной, а излишняя детализация в итоге снова приведет к изложению известных фундаментальных результатов конкретных методов. Второй вопрос связан с выбором основных конструкций, с помощью которых возможно создание достаточно общей теории.

В качестве такой конструкции было выбрано понятие «предельной корректности». Термин «корректность в предельном смысле» был введен в работах [72, 73], однако еще значительно раньше широкое распространение получили термины «сингулярные возмущения», «задача с сингулярными возмущениями» для описания особых ситуаций, частично рассмотренных в примерах п. 1. Задачи с сингулярными возмущениями встречаются во многих прикладных проблемах, поэтому для их исследования были развиты такие асимптотические методы, как метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го (ПЛГ), метод сращиваемых асимптотических разложений и другие [22], существенно отличающиеся от методов решения задач с регулярными возмущениями. Это сразу подсказывает признак для классификации методов и облегчает развитие общих концепций асимптотических методов, однако мы считаем целесообразным развитие концепции предельной корректности.

Введение понятия «предельной корректности» оказалось полезным по следующим соображениям:

1) на основе этого понятия можно развить общую теорию асимптотических методов и рассмотреть с единой точки зрения все существующие методы;

2) термином «сингулярные возмущения» охватываются частные реализации явления некорректности;

3) существует тесная связь теории предельной корректности с теорией корректности постановки задач математической физики, так что общие концепции теории корректности находят в ряде случаев адекватное отражение в теории предельной корректности.

При постановке задачи изучения конкретной системы асимптотическими методами рассматриваются две математические модели: общая для произвольных значений параметра и предельная. На основе анализа этих моделей определяется возможность построения регулярных (или особых) асимптотических решений. Этот анализ можно несколько обобщить и рассматривать весь параметрический интервал $M \subseteq [0 \div \infty)$ ($\epsilon \in M$) и две предельные модели для $\epsilon \rightarrow 0$ и $\epsilon \rightarrow \infty$. Из каких-либо соображений (о них будет сказано ниже) заранее указывается класс асимптотических методов (например, регулярный), и тогда необходимо ставить задачу выбора корректной предельной математической модели.

Однако установление корректного предела еще недостаточно для выбора метода, поскольку окончательный выбор тесно связан с информацией для приложений.

Для приложений необходима информация о поведении системы: а) в окрестности корректного предела параметрического интервала; б) в окрестности некорректного предела параметрического интервала; в) во всем параметрическом интервале $M \subseteq [0 \div \infty)$. Именно характер информации для приложений и анализ предельной корректности в основном определяют выбор метода. Большинство асимптотических методов возникло до массового распространения ЭВМ и использовалось в качестве инструмента аналитических исследований. В настоящее время эти методы не утратили своего значения, но дополнительно появилось требование их реализуемости на ЭВМ. Значение их необходимо оценивать с учетом реализуемости на ЭВМ и эффективности асимптотических алгоритмов. С этой точки зрения регулярным асимптотическим методам следует отдать предпочтение.

Наибольшей общностью среди регулярных асимптотических методов обладает метод функциональных параметров [76, 78]. Он, кроме того, оказался эффективным инструментом теории предельной корректности, в связи с чем в настоящей монографии этот метод будет основным инструментом и объектом изучения.

Заметим, что приведенные выше высказывания о взаимодействии двух моделей весьма схематичны.

В действительности пространство состояний, шкала сравнения и математические модели оказываются тесно связанными и речь идет о выяснении классов предельной корректности, в которых существуют регулярные асимптотические решения той или иной задачи. Необходимый уровень общности достигается на основе концепций теории системы. Любой объект, изучаемый вычислительными методами, рассматривается как система, что позволяет отвлечься в нужных местах от его физического содержания и использовать для построения теории предельной корректности элементы теории систем. Однако, помня о том, что асимптотические методы возникли из реальных проблем, мы посчитали невозможным полный отход от физического содержания дела.

В первом разделе работы в основном рассматриваются формальные конструкции и физические толкования используются для внесения ясности в ряд вопросов, тогда как в остальных разделах при анализе конкретных систем описание физического содержания тех или иных результатов дается в большем объеме. Таким образом, в качестве основных рассматриваются такие конструкции, как система, предельная корректность, метод функциональных параметров.

Полезность настоящей монографии при исследовании конкретных систем определяется тем, что асимптотические методы очень гибки и чувствительны к типу системы и формальное их применение часто приводит к грубым ошибкам, которые тонут в формализме вычислений. В связи с этим исследователь до

построения формализма асимптотических решений должен провести анализ предельной корректности. Кроме того, монография содержит наиболее полное изложение метода функциональных параметров.

В целом процесс исследования конкретной системы можно записать в виде следующих этапов:

- 1) формулировка цели исследования, постановка задачи;
- 2) анализ предельной корректности.

Результат: а) предельная математическая модель; б) пространство состояний; в) шкала сравнения;

- 3) развитие формализма асимптотического решения;
- 4) разработка асимптотических алгоритмов и их реализация на ЭВМ;
- 5) получение конечной информации.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ

Глава I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ

§ 1.1. Определение системы и ее математическая модель

При изучении различных объектов (в том числе теорий) целесообразно рассматривать их с точки зрения теории систем, которая обеспечивает необходимую общность исследования, позволяя в то же время наиболее естественно изложить конкретные теории.

Для наших целей концепция теории систем особенно удобна, поскольку только на ее основе оказалось возможным обобщить результаты различных вариантов асимптотических методов, развитых в недрах не связанных между собой конкретных научных направлений.

В дальнейшем будет полезным следующее определение системы [73, 76].

1. Для системы определены пространство состояний E и параметрическое пространство M , в котором задано поведение системы.

2. Пространство состояний E содержит собственное подмножество (число элементов множества E не менее двух).

3. Система обладает свойством функциональной эмерджентности (целостности).

Однако не все системы, задаваемые тремя аксиомами, можно описать с помощью асимптотических методов, поэтому введем дополнительные аксиомы и выделим класс систем, изучаемых асимптотическими методами:

1. Существует область Ω евклидова пространства R^n ($\Omega \subseteq R^n$), над которой задано пространство состояний E .

2. Пространство состояний системы E — метрическое пространство.

3. Параметрическое пространство системы M — некоторая область евклидова пространства R^k ($M \subseteq R^k$).

Если для системы определено пространство управлений U , элементы которого воздействуют на систему для достижения какой-либо цели, то такую систему будем называть управляемой.

Если для системы назначен критерий качества

$$\Psi = \min_{u \in \bar{U}} \Phi$$

(Φ — некоторый функционал), то такую систему будем определять как оптимальную управляемую.

Введем обозначения: $S(E, M)$ — система; $S(E, M, \bar{U})$ — управляемая система; $S(E, M, \bar{U}, \Psi)$ — оптимальная управляемая система. В случаях, когда существенно только понятие системы, будем обозначать ее символом S .

Далее полагаем, что задана математическая модель системы в виде набора математических конструкций, обеспечивающих выбор единственного элемента из пространства состояний системы (единственного решения).

В общей теории предельной корректности математическую модель удобно задавать в виде обобщенного оператора [73]:

$$T\varphi = \chi, \quad (1.1)$$

$$g \in \Omega, \quad \varphi \in E(\Omega), \quad \varepsilon \in M, \quad \chi \in X.$$

Как правило, обобщенный оператор включает дифференциальный оператор и набор дополнительных (начальных, краевых, на бесконечности) условий, обеспечивающих существование единственного решения задачи.

§ 1.2. Задача эволюции системы.

Шкала сравнения. Асимптотические разложения

Пусть при некотором значении вектора параметров ε_0 задано (или удалось определить из математической модели (1.1)) состояние системы φ_0 , тогда можно сформулировать задачу эволюции системы в параметрическом пространстве из состояния φ_0 .

Пусть существует эволюционный оператор $L(\varepsilon)$, тогда

$$\varphi = L(\varepsilon)\varphi_0. \quad (1.2)$$

Задача эволюции системы S в параметрическом пространстве из состояния φ_0 в основном изучается асимптотическими методами.

З а м е ч а н и е. Как правило, при изучении системы асимптотическими методами из параметрического пространства M выделяют интервал $M_0 \subseteq [0 \div \infty)$, содержащий существенный физический параметр $\varepsilon (\varepsilon \in M_0)$, и изучают эволюцию только в интервале M_0 .

Изучение системы асимптотическими методами требует знания шкалы сравнения $\mathcal{E}(M_0)$, заданной над параметрическим интервалом M_0 или его частью.

Определение 1. Шкала сравнения $\mathcal{E}(M_0)$ представляет собой упорядоченное множество с элементами $\sigma_\alpha(\varepsilon)$, $\varepsilon \in M_0$, где α пробегает множество индексов A_α , наделенное структурой совершенно упорядоченного множества, противоположной структуре порядка шкалы сравнения $\mathcal{E}(M_0)$, так что отношение $\alpha < \beta$ эквивалентно отношению $\sigma_\beta(\varepsilon) < \sigma_\alpha(\varepsilon)$.

Определение 2. Если элементы шкалы обладают свойством $\sigma_\alpha(\varepsilon)\sigma_\beta(\varepsilon) = \sigma_{\alpha+\beta}(\varepsilon)$, то они формируют групповую шкалу $\mathcal{E}_0(M_0)$.

Определение 3. Если элементы шкалы обладают свойством $\sigma_\alpha(\varepsilon)\sigma_\beta(\varepsilon) = \sigma_\gamma(\varepsilon)$, $\gamma \neq \alpha + \beta$, то они формируют квазигрупповую шкалу.

Приведем несколько примеров шкал сравнения. Наиболее простой групповой шкалой является шкала метода малого параметра $\{\varepsilon^\alpha\}$. В задачах механики жидкости и газа часто встречаются следующие квазигрупповые шкалы:

- 1) $\varepsilon, \varepsilon^2 \ln \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \ln \varepsilon, \varepsilon^3, \dots$;
- 2) $\varepsilon^2 \ln \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon, \varepsilon^4 \ln \varepsilon, \varepsilon^4, \dots$;
- 3) $\varepsilon \ln \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2 \ln \varepsilon, \varepsilon^2, \dots$

Для групповой шкалы удобно определить основной элемент $\sigma(\varepsilon)$ и ввести новое обозначение для шкалы сравнения $\{\sigma^\alpha(\varepsilon)\}$.

З а м е ч а н и е. При решении прикладных задач очень часто возникают ошибки из-за неверного выбора шкалы сравнения. Поступая асимптотическое решение с групповой шкалой, можно потерять ряд членов решения, обязанных своим происхождением негрупповым элементам. Некоторый анализ подобных ситуаций содержится в монографии Ван-Дайка [22].

Первое определение асимптотических разложений [73]. Функция $\varphi \in E(\Omega)$ допускает асимптотическое разложение с точностью до $\sigma_\alpha(\varepsilon)$ (относительно шкалы сравнения $\mathcal{E}(M_0)$), если существует множество элементов $(a_\lambda) \in E(\Omega)$, $\lambda < \alpha$, для которых справедливо соотношение

$$\left[\varphi - \sum_{\lambda < \alpha} a_\lambda \sigma_\lambda(\varepsilon) \right] \in O[\sigma_\alpha(\varepsilon)].$$

Здесь $O[\sigma_\alpha(\varepsilon)]$ — символ порядка, обладающий свойством

$$\frac{O[\sigma_\alpha(\varepsilon)]}{\sigma_\alpha(\varepsilon)} \rightarrow C, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это широко распространенное определение асимптотических разложений в ряде задач оказывается неудовлетворительным, в связи с чем введем расширенное определение асимптотического разложения.

В задаче эволюции (1.2) эволюционный оператор $L(\varepsilon)$ есть некоторая функция параметра ε , и можно ввести пространство эволюционных операторов $E_\varepsilon(M_0)$, заданное над параметриче-

ским пространством, которому будут принадлежать операторы как функции параметра ε и $L(\varepsilon) \in E_\varepsilon(M_0)$. Естественным образом вводя норму пространства E_ε , можно дать и новое определение асимптотического разложения.

Расширенное определение асимптотических разложений. Функция $\varphi \in E(\Omega)$ допускает асимптотическое разложение в пространстве $E_\varepsilon(M_0)$ с точностью до $\sigma_\alpha(\varepsilon)$ (относительно шкалы сравнения $\mathcal{S}(M_0)$), если существует множество элементов $\alpha_\lambda \in E(\Omega)$, $\lambda < \alpha$, для которых справедливо соотношение

$$\left\| \varphi - \sum_{\lambda < \alpha} a_\lambda \sigma_\lambda(\varepsilon) \right\|_{E_\varepsilon} \sim O[\sigma_\alpha(\varepsilon)].$$

В зависимости от конкретного вида пространства $E_\varepsilon(M_0)$ асимптотические разложения будут различными, и часто правильный выбор пространства $E_\varepsilon(M_0)$ определяет качество асимптотик.

Применительно к задаче эволюции (1.2) речь, естественно, должна идти об асимптотическом разложении оператора $L(\varepsilon)$:

$$L(\varepsilon) = 1 + \sigma_1(\varepsilon)L_1 + \sigma_2(\varepsilon)L_2 + \dots + \sigma_{\alpha-1}(\varepsilon)L_{\alpha-1} + O(\sigma_\alpha(\varepsilon)). \quad (1.3)$$

Заметим, что у рассмотренных асимптотик, заданных в пространстве $E_\varepsilon(M_0)$, элементы шкалы $\sigma_\alpha(\varepsilon)$ также будут рассматриваться как элементы этого пространства.

§ 1.3. Понятие о корректности в предельном смысле

При изучении задачи эволюции системы вместе с обобщенным оператором $T\varphi = \chi$, описывающим поведение системы S при произвольных значениях параметра ε , вводится обобщенный оператор $T_0\varphi_0 = \chi_0$, описывающий поведение системы S при некотором характерном значении параметра ε_0 .

Итак, пусть состояние системы S при значении параметра $\varepsilon = \varepsilon_0$ описывается математической моделью

$$T_0\varphi_0 = \chi_0, \quad g_0 \in \Omega_0; \quad \varphi_0 \in E(\Omega_0); \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \chi_0 \in X. \quad (1.4)$$

Будем называть ее предельной моделью системы.

Пусть также мы поставили задачу построения асимптотического решения (по существу — разложение оператора $L(\varepsilon)$ в виде (1.3)), в котором нулевым приближением должно быть решение φ_0 , даваемое математической моделью (1.4). При постановке этой задачи могут возникнуть следующие вопросы.

1. Какими свойствами должны обладать математические модели (1.1) и (1.4), для того чтобы существовало асимптотическое решение (в смысле первого определения)?

2. Какими свойствами должны обладать математические модели (1.1) и (1.4), для того чтобы существовало асимптотическое решение в заданном пространстве $E_\varepsilon(M_0)$?

3. Существует ли регулярное асимптотическое решение¹ задачи при заданной предельной модели?

4. Относительно каких шкал сравнения существуют асимптотические решения для заданных математических моделей (общей и предельной)?

Ответ на эти вопросы, а также на ряд других и должен дать анализ предельной корректности.

В первых работах по предельной корректности [73] было дано следующее определение: если $\varphi \in C(M_0)$, $T\varphi \rightarrow T_0\varphi_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow \Omega_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и малые изменения φ_0 дают малые изменения φ , то задача будет корректной в предельном смысле относительно $\varepsilon = 0$. Здесь важными являются:

- 1) непрерывность решения по параметру ($\varphi \in C(M_0)$);
- 2) существование в определенном смысле пределов

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T\varphi - T_0\varphi_0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Omega - \Omega_0) = 0;$$

- 3) устойчивость решения относительно изменений φ_0 .

Это определение правильно отражало существо дела, однако обладало рядом недостатков при построении конструктивной теории предельной корректности, а именно: в определении слабо учитывается алгоритмический аспект проблемы.

Алгоритмический аспект связан с асимптотическим разложением оператора $L(\varepsilon)$ относительно шкалы сравнения $\mathcal{E}(M_0)$, что должно отразиться и на определении предельной корректности. На первом этапе исследования установление основных фактов (непрерывности, существования пределов, устойчивости) достаточно для положительного вывода о возможности построения асимптотического решения, но необходим еще правильный выбор шкалы сравнения для построения формализма решения.

Недостатком является и то, что в определении рассматриваются только непрерывные по параметру решения ($\varphi \in C(M_0)$). Это ограничивает класс асимптотик и класс математических моделей. Поэтому для дальнейшего изложения основным будет следующее определение предельной корректности. Если

- а) $\varphi \in E_\varepsilon(M_0)$;
- б) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T\varphi - T_0\varphi_0) = 0$;
- в) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Omega - \Omega_0) = 0$

и существует асимптотическое разложение оператора $L(\varepsilon)$ относительно шкалы сравнения $\mathcal{E}(M_0)$

$$L(\varepsilon) = 1 + \sigma_1(\varepsilon)L_1 + \sigma_2(\varepsilon)L_2 + \dots + \sigma_{\alpha-1}(\varepsilon)L_{\alpha-1} + O(\sigma_\alpha(\varepsilon)),$$

где L_i — ограниченные операторы, то задача будет корректной в предельном смысле относительно $\varepsilon = 0$ и шкалы $\mathcal{E}(M_0)$.

¹ Смысл термина «регулярное асимптотическое решение» будет пояснен позднее.

З а м е ч а н и е. В определениях предельной корректности в качестве характерного значения параметра принято $\varepsilon=0$, тогда как в предыдущих параграфах было принято $\varepsilon=\varepsilon_0$. Переход от ε_0 к $\varepsilon=0$ не ограничивает общности и осуществляется с помощью простейшего преобразования $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_0$.

§ 1.4. Связь предельной корректности с корректностью постановки задач математической физики

Введенные определения предельной корректности позволяют проанализировать связь теории предельной корректности с корректностью постановки задач математической физики.

Корректно поставленная задача должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) решение существует;
- 2) решение определяется однозначно;
- 3) решение непрерывно зависит от данных задачи.

Обычно анализ корректности постановки задачи математической физики связан с выяснением наиболее естественных граничных условий для различных типов дифференциальных уравнений.

В этом анализе участвуют «вход» φ_0 и решение φ и изучается взаимодействие этих элементов.

В теории предельной корректности также изучается взаимодействие предельного «входа» φ_0 и общего решения φ . В идейном плане эти виды корректности близки между собой, однако имеются и существенные различия, а именно:

1. В исследовании корректности постановки задач изучается структура обобщенного оператора $T\varphi$ и делается вывод о корректности или некорректности постановки задачи, тогда как в теории предельной корректности заранее полагается, что эти свойства оператора $T\varphi$ известны и при заданном предельном операторе $T_0\varphi_0$ изучаются их взаимодействия или необходимая структура предельного оператора $T_0\varphi_0$ для построения асимптотических решений заданного класса.

2. При анализе корректности постановки задач математической физики основное внимание уделяется взаимодействию «входа» φ_0 и общего решения φ , а в теории предельной корректности — взаимодействию двух моделей (основной и предельной).

3. Теория предельной корректности обязана своим происхождением асимптотическим методам и опирается на понятие шкалы сравнения $\mathcal{E}(M_0)$ и асимптотические разложения оператора $L(\varepsilon)$.

4. В итоге в анализе предельной корректности для той или иной математической задачи (может быть, и некорректно поставленной) устанавливаются класс предельной корректности,

значение корректного предела, шкала сравнения, пространство $E_s(M_0)$, в котором задача имеет асимптотическое решение.

При анализе корректности по Адамару — Тихонову рассматриваются: класс E_0 начальных значений ($\varphi_0 \in E_0$); класс $E(\Omega)$ решений задачи ($\varphi \in E(\Omega)$); структура математической модели.

При анализе предельной корректности исследуются: структура общей математической модели; структура предельной математической модели; пространство $E(\Omega_0)$ общих решений задачи; пространство $E_0(\Omega_0)$ предельных решений задачи; пространство $E_s(M_0)$ эволюционных операторов; шкала сравнения $\mathcal{E}(M_0)$, заданная над параметрическим интервалом M_0 ; параметрический интервал $M_0 \subseteq [0 \div \infty)$ (полусегмент).

З а м е ч а н и е. В задаче Коши и начально-краевых задачах для дифференциальных уравнений, в которых в качестве параметра рассматривается время, предельная корректность более тесно связана с корректностью постановки задач и соответствующие результаты оказываются полезными при анализе обоих видов корректности.

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ

§ 2.1. Классы предельной корректности

Как следует из главы 1, при анализе предельной корректности необходимо рассматривать пространство решений задачи, пространство эволюционных операторов, параметрический интервал и шкалу сравнения. Их взаимное согласование и анализ приводят к выводу о возможности построения асимптотических решений, в связи с чем становится очевидной целесообразность объединения этих конструкций предельной корректности.

В дальнейшем под классом предельной корректности будет пониматься следующий набор математических конструкций:

$$K_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)} = \left\{ E(\Omega), M_0, E_s(M_0), \mathcal{E}(M_0) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right\}. \quad (2.1)$$

Указание класса предельной корректности в конкретной проблеме положительно решает вопрос о существовании формализма асимптотического решения, и грамотный анализ классов предельной корректности в значительной степени предопределяет успех всего исследования.

При задании параметрического пространства M_0 в виде $M_0 \subseteq [0 \div \infty)$ возможны три случая:

1) оба предела $\varepsilon \rightarrow 0$, $1/\varepsilon \rightarrow 0$ корректны (но, может быть, для разных пространств $E(\Omega)$!);

2) один из пределов корректен;

3) ни один из пределов не корректен.

Наиболее типична ситуация, когда один предел корректен. В этом случае вначале решается задача определения корректного предела, а затем идет согласование (выбор) предельной модели. При этом могут быть случаи, когда заранее задана предельная модель, но корректным оказался противоположный предел параметрического интервала. Возможные пути исследования состоят или в формировании новой предельной модели, или в развитии специфического асимптотического метода, в котором нулевое приближение дается некорректной предельной моделью.

Включение в класс предельной корректности шкалы сравнения $\mathcal{S}(M_0)$ и ее анализ — неотъемлемая часть изучения предельной корректности. Иногда эта задача требует серьезного математического исследования. Дело в том, что некоторые системы малочувствительны к шкале сравнения и имеется большая свобода в ее выборе. Однако существуют системы, эволюцию которых можно описать только в одной шкале сравнения, и определение этой шкалы является нетривиальной задачей (см., например, теорему И. Г. Малкина в теории резонансных решений [52, стр. 131]).

К сожалению, вопрос о выборе шкалы сравнения трудно изложить достаточно полно в отрыве от метода функциональных параметров (см. гл. 4—6), поэтому мы вынуждены ограничиться здесь только общими соображениями.

Следует отметить также, что для одних задач можно априори (пусть даже в результате дополнительного серьезного исследования) задать шкалу сравнения, а для других это невозможно. Удастся задать только часть шкалы или ее тип (см. гл. 8). В таких задачах шкала формируется в процессе построения асимптотического решения.

Вопрос о формировании шкалы сравнения в процессе решения очень важен, поскольку именно с ним связано большое число ошибок при построении асимптотических решений. Поиск решений в задаче с формируемой шкалой с ее априорным заданием часто приводит к потере ряда членов, не учитываемых заданной шкалой (см., например, [22]). На основе этого свойства систем классы предельной корректности можно разделить на два типа:

а) с заданной шкалой сравнения;

б) с формируемой шкалой сравнения.

З а м е ч а н и е. Задачу формирования шкалы сравнения можно заранее решить до конца путем задания более общей шкалы сравнения, что не приведет к ошибкам в асимптотическом решении, поскольку лишние элементы шкалы сравнения автоматиче-

ски выпадут в процессе реализации алгоритма. Однако это не всегда удобно, и лучше всего предоставить алгоритму возможность самому формировать шкалу.

В заключение этого параграфа обсудим смысл символа $\left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right)$ в (2.1). В главе 1 рассматривался вариант теории, когда заданы общая и предельная модели системы и предполагалось, что информации о предельной модели и структуре общей модели достаточно для решения задачи эволюции системы. По существу выбор нулевого приближения φ_0 и построение асимптотического разложения оператора $L(\varepsilon)$ и решали задачу эволюции.

Но возможна другая постановка задачи. При $\varepsilon=0$ задано состояние системы φ_0 (или ее предельная модель). Необходимо перевести систему из состояния φ_0 в состояние φ_T при $\varepsilon=\varepsilon_T$ и ограничениях, задаваемых общей математической моделью. Как видно, в этой задаче информации о состоянии системы при $\varepsilon=0$ недостаточно для построения решения и обязательно должна использоваться информация о состоянии системы при $\varepsilon=\varepsilon_T$ (часто $\varepsilon_T \rightarrow \infty$).

В более общем случае могут быть заданы общая и две предельные модели (одна из них корректная) и цель — перевод системы из состояния, заданного одной предельной моделью, в состояние, заданное другой предельной моделью. Эти задачи в дальнейшем будут называться задачами терминальной эволюции системы.

В соответствии с этим следует рассматривать два класса предельной корректности:

- 1) регулярный класс K_1 — с одной предельной моделью;
- 2) терминальный класс K_2 — с двумя предельными моделями.

§ 2.2. Классификация асимптотических методов

Все асимптотические методы можно разделить на три группы: регулярные, терминальные и сингулярные.

Первая группа методов применима к задачам, в которых задана общая и предельная модели, причем корректный предел и предельная модель согласованы между собой. Вторая группа охватывает задачи с двумя предельными моделями, заданными для обоих концов параметрического интервала. Третья группа справедлива для задач, в которых предельная модель и корректный предел не согласованы между собой.

З а м е ч а н и е. В задачах с сингулярными возмущениями, изучаемых третьей группой методов, в рамках одной предельной модели часто не удается получить приближение, равномерно пригодное для всей области Ω . Как правило, в них рассматриваются две предельные модели, дающие равномерные приближения для определенных частей области Ω . Обычно область Ω

представляют в виде $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, где Ω_1 — внешняя, Ω_2 — внутренняя области. Для Ω_1 и Ω_2 формируют свои предельные модели и строят соответствующие асимптотические разложения.

§ 2.3. Уровни предельной корректности

Анализ предельной корректности на уровне модели $T\varphi = \chi$ иногда оказывается затруднительным или невозможным, а иногда может привести к неверным суждениям и формальным решениям. В подобных ситуациях необходим переход от математической модели, задаваемой обобщенным оператором $T\varphi = \chi$ (модели верхнего уровня), к новой математической модели нижнего уровня. Процесс преобразования математической модели осуществляется совокупностью математических операций регуляризирующего конструктора (РК).

Если РК обладает свойством

$$\hat{\varphi} = \text{РК}\varphi,$$

то математическая модель второго уровня будет сформулирована для функции $\hat{\varphi}$

$$\hat{T}\hat{\varphi} = \hat{\chi}, \quad g \in \hat{\Omega}, \quad \hat{\varphi} \in \hat{E}(\hat{\Omega}), \quad \varepsilon \in M_0. \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что РК реконструирует систему S в систему \hat{S} , причем, как правило, изучение системы \hat{S} оказывается более простой задачей, чем системы S .

Введение РК целесообразно, если:

- 1) анализ предельной корректности на уровне модели первого уровня трудно осуществим (а часто и невозможен);
- 2) предел (для определенности $\varepsilon = 0$), в окрестности которого нужна информация о поведении системы, некорректен для системы S , но корректен для системы \hat{S} .

Таким образом, анализ предельной корректности возможен на двух уровнях:

- а) для системы S (верхний уровень);
- б) для системы \hat{S} (нижний уровень).

Заметим, что преобразование $S \rightarrow \hat{S}$ в проблемах математической физики часто означает процесс сведения (решения) крайних задач к интегральным уравнениям и является необходимым при исследовании проблемы. Кроме того, преобразование системы S в систему \hat{S} с конкретным видом регуляризирующего конструктора может определить основную идею того или иного асимптотического метода (например, метод Вентцеля—Крамерса — Бриллюэна (ВКБ) [107]).

Рассмотрим несколько примеров для выяснения роли регуляризирующего конструктора.

Пример 1. Плоская задача о подводном крыле [62].

Пусть под свободной поверхностью тяжелой жидкости с большой скоростью движется тонкая дужка.

В пространстве потенциала ускорений эта задача может быть сформулирована в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 0, & g \in \Omega; & & (2.3) \\ \theta_y &= F(x), & x \in [-1 \div 1]; & & [\theta] = 0, & x = -1; \\ \theta &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty; & & \theta_x &= 0, & g \in L. \end{aligned}$$

В этой задаче существует физический параметр \bar{h} , в связи с чем можно поставить цель построения асимптотических решений.

В анализе предельной корректности мы должны прежде всего выбрать корректный предел из двух возможных ($\bar{h} \rightarrow 0$, $\bar{h} \rightarrow \infty$) и затем развить формализм соответствующих асимптотических решений. Но параметр \bar{h} явно не входит в краевую задачу, и осуществить анализ предельной корректности на уровне модели (2.3) не удастся. После введения регуляризирующего конструктора в виде интегрального оператора

$$\begin{aligned} A\gamma &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\ln \frac{1}{R} + G_1(\rho, g) \right] ds, \\ R &= \sqrt{(x-s)^2 + (y-\eta)^2} \end{aligned}$$

задача (2.3) сводится к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) \left[\frac{1}{x-s} + \frac{x-s}{(x-s)^2 + 16h^2} \right] ds = F(x), \quad x \in [-1 \div 1], \quad (2.4)$$

описывающему эволюцию системы \hat{S} , изучение которого уже не представляет трудностей.

В связи с тем что уравнение (2.4) имеет ряд интересных особенностей и с точки зрения предельной корректности, в дальнейшем оно будет изучено дополнительно (см. гл. 5).

Пример 2. Плоская задача о подводном крыле с произвольными числами Фруда [62].

В этой задаче граничное условие

$$\theta_x = 0, \quad g \in L$$

на свободной поверхности в (2.3) заменяется более общим условием

$$\theta_{xx} + \omega^2 \theta_y = 0, \quad g \in L. \quad (2.5)$$

В задаче (2.3) при условии (2.5) можно попытаться отыскать асимптотическое решение вида

$$\theta = \theta_0 + \omega^2 \theta_1 + \omega^4 \theta_2 + \omega^6 \theta_3 + \dots + O(\omega^N). \quad (2.6)$$

Следуя обычной процедуре, из (2.3) получаем краевую задачу для θ_n :

$$\begin{aligned} \Delta\theta_n &= 0, & g \in \Omega; \\ \theta_{ny} &= F_n(x), & x \in [-1 \div 1]; & [\theta_n] = 0, & x = -1; \\ \theta_n &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty; & \theta_{ny} = -\theta_{n-1xx}, & g \in L. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Эта задача имеет единственное решение. Создается впечатление, что (2.6) действительно определяет асимптотическое решение θ при $\omega^2 \rightarrow 0$, но это не так. Дефект построения решения связан с тем, что в силу (2.5) в решении существуют свободные волны типа

$$\theta_{\text{в}} = e^{\omega^2 y} \begin{pmatrix} A \sin \omega^2 x \\ B \cos \omega^2 x \end{pmatrix}$$

на бесконечности за подводным крылом. Переход от однородного условия (2.5) к условию $\theta_{n-1xx} + \theta_{ny} = 0$ исключает такие решения, что приводит к неверным окончательным результатам.

В связи с этим возникает вопрос о существовании асимптотик типа (2.6). Асимптотические решения такого типа существуют, но построить их можно на уровне моделей нижнего уровня, перейдя от краевой задачи к интегральному уравнению.

Пример 3. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка [52].

Запишем уравнение

$$\ddot{x} + \varepsilon \omega^2(t) x = 0, \quad \omega^2(t) \geq \alpha > 0, \quad (2.8)$$

которое интересно с точки зрения построения его асимптотических решений при $\varepsilon \gg 1$. Нетрудно показать, что предел $\varepsilon \rightarrow \infty$ не обладает корректностью. Действительно, принимая решение в виде

$$x = x_0 + \frac{1}{\varepsilon^2} x_1 + \frac{1}{\varepsilon^4} x_2 + \dots + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\right), \quad (2.9)$$

в силу (2.8) для x_n получаем рекуррентное соотношение

$$\omega^2(t) x_n = -x_{n-1},$$

по $x_0 = 0$ и, следовательно, ряд (2.9) дает тривиальные решения.

Но совершенно очевидно, что уравнение (2.8) имеет и нетривиальные решения. В частности, если $\omega^2(t) = \omega^2$, то решение его будет иметь вид

$$x = A \sin \lambda \omega x + B \cos \lambda \omega x.$$

Идея применения к этому уравнению регуляризирующего конструктора вида РКФ(t) привела к развитию метода ВКБ.

Для уравнения (2.8) доказана следующая теорема (Н. Н. Моисеев [52]): Пусть функция $\omega^2(t) \in C^2(0 \div T)$ и суще-

существует такая постоянная $\alpha > 0$, что для любого $t \in [0, T]$ $\omega(t) \geq \alpha$. Тогда для любого $t \in [0, T]$ функция

$$F_{1,2}(t) = \frac{A_{1,2}}{\sqrt{\omega}} \exp \left[\pm i\varepsilon \int_0^t \omega(t) dt \right]$$

является асимптотическим решением уравнения (2.8) при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Если применить преобразование

$$x = F_1(t)z,$$

то уравнение (2.8) перейдет в

$$\ddot{z} + 2i\omega\varepsilon\dot{z} + i\dot{\omega}z = 0,$$

а для составляющих асимптотического решения

$$z = z_0 + \frac{1}{\varepsilon} z_1 + \frac{1}{\varepsilon^2} z_2 + \dots + O\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\right) \quad (2.9')$$

имеют место рекуррентные уравнения:

$$2\omega(t)\dot{z}_0 + \dot{\omega}z_0 = 0,$$

$$2\omega(t)\dot{z}_n + \dot{\omega}z_n = i\dot{z}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти уравнения имеют нетривиальные решения, и асимптотика (2.9') существует.

Этот пример интересен тем, что он наглядно иллюстрирует роль регуляризирующего конструктора в изменении ситуации.

Если для системы S (x определяет состояние системы S) предел $\varepsilon \rightarrow \infty$ был некорректным, то в системе \hat{S} ситуация изменилась на противоположную.

Глава 3

АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ

§ 3.1. Постулат корректности

Из изложенного в предыдущих главах возникают вопросы изучения видов предельной некорректности и распознавания «сингулярной ситуации» на ранних этапах исследования. Для задач с сингулярными возмущениями довольно подробный анализ с формулировкой физического критерия однородности содержится в монографии М. Ван-Дайка [22]. С точки зрения развиваемой теории этот анализ не охватывает полностью явлений предельной некорректности (он включает лишь задачи механики жидкости и газа с сингулярными возмущениями) и содержит

только эвристические соображения (не всегда безупречные — см. ниже).

В настоящей главе мы проанализируем явления предельной некорректности на основе развиваемых концепций. Заметим, что большинство исследований посвящено асимптотическим решениям для $E_\varepsilon(M_0) = C^n(M_0)$ (часто $C^\infty(M_0)$). Именно особенности пространства $C^\infty(M_0)$ определили особенности корректных или некорректных вырождений. Одну из них проиллюстрируем на простейшем примере.

Рассмотрим асимптотическое разложение функции $f(\varepsilon) = e^{-\varepsilon}$ в окрестности $\varepsilon=0$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$. В окрестности $\varepsilon=0$ эта функция имеет разложение

$$e^{-\varepsilon} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{k!} + O(\varepsilon^N),$$

тогда как в окрестности $1/\varepsilon=0$ разложение тривиально [22]

$$e^{-\varepsilon} = 0 + O(1/\varepsilon^N).$$

Таким образом, функция $f(\varepsilon)$ имеет лишь один корректный предел $\varepsilon=0$, что наиболее характерно для задач теории систем, в которых изучается асимптотическое решение класса $C^\infty(M_0)$.

Сформулируем постулат корректности.

Если в задаче эволюции системы $L(\varepsilon) \in C^\infty(M_0)$ и $M_0 \subseteq [0 \div \infty)$, то система имеет один корректный предел. Этот постулат имеет важное значение в связи с методом функциональных параметров (см. гл. 4).

Утверждение о существовании корректного предела сводит задачу анализа корректности к задаче определения корректного предела. Далее в зависимости от ценности информации об эволюции системы для приложений возможны варианты, когда необходима информация о поведении системы: а) в окрестности корректного предела; б) в окрестности некорректного предела; в) на всем параметрическом интервале $M_0 \subseteq [0 \div \infty)$.

Естественно, наиболее простым является вариант а).

Вводя в рассмотрение малую шкалу $\{\varepsilon^\alpha\}$, нетрудно построить асимптотическое решение.

Для изучения эволюции системы в варианте б) можно применить сингулярные асимптотические методы, в совокупности для б) и в) удобным оказывается метод функциональных параметров.

Ван-Дайк для распознавания сингулярных ситуаций предлагает следующее правило [22]: возмущенное (асимптотическое) решение равномерно пригодно в координатах пространства и времени, если параметр возмущения ε не представляет собой отношения двух длин.

Во многих задачах механики сплошной среды это правило приводит к положительному результату. Однако существуют, по-

видимому, задачи, когда оно оказывается несправедливым. В качестве такого примера рассмотрим задачу о подводном крыле (см. § 2.3, пример 1).

В интегральное уравнение (2.4) входит параметр возмущения \bar{h} (или для другого предела $1/\bar{h}$), представляющий отношение погружения к хорде крыла (отношение двух длин). Однако уравнение имеет асимптотическое решение вида

$$\gamma(s) = \gamma_0(s) + \frac{1}{\bar{h}^2} \gamma_1(s) + \frac{1}{\bar{h}^4} \gamma_2(s) + \dots + O\left(\frac{1}{\bar{h}^N}\right). \quad (*)$$

Заметим, что решение со шкалой $\{\bar{h}^\alpha\}$ не существует (что следует и из постулата корректности).

Известно, что имеется три вида предельной некорректности: структурная, локальная и в ограниченной области $\Omega_2 \subset \Omega$. Прежде чем перейти к анализу этих некорректностей, сделаем одно существенное замечание.

Определив в главе 2 класс предельной корректности как некоторый набор математических конструкций, мы по существу вместе с указанием метрических пространств, которым принадлежит решение, дали и метод решения (путем задания шкалы сравнения). Поэтому, говоря о предельной некорректности и имея в виду предельную модель и соответствующее значение предела, надо помнить о том, что понятие корректности и некорректности имеет смысл по отношению к тому или иному асимптотическому методу. Часто задача: «задана общая и предельная (некорректная!?) модель системы; необходимо разработать асимптотический (регуляризирующий) метод, для которого предельная модель будет корректной» — имеет положительное решение (см., например, гл. 11, метод ПЛГ).

§ 3.2. Структурная некорректность

О п р е д е л е н и е. Если для системы S общая и предельная модели имеют различные структуры (в определенном смысле) для заданного класса предельной корректности $K(\frac{1}{2})$, то система S будет обладать структурной некорректностью.

В настоящем параграфе мы не будем подробно анализировать структуры математических моделей, а рассмотрим несколько примеров.

В смысле структурной некорректности наиболее обширен класс задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Проведем анализ этих задач на примере задачи для уравнений Навье — Стокса динамики вязкой жидкости.

Задача об обтекании тела вязкой жидкостью может быть сформулирована в виде:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \bar{V}, \quad \nabla \bar{V} = 0, \quad g \in \Omega; \quad (3.1)$$

$$\bar{V} = 0, \quad g \in S, \quad g \in \{x, y\};$$

$$\bar{V} \rightarrow \bar{V}_0, \quad x \rightarrow \infty,$$

где \bar{V} — вектор скорости жидкости, S — поверхность тела, \bar{V}_0 — вектор скорости набегающего потока.

При больших числах Рейнольдса в задачу (3.1) можно ввести малый параметр $\varepsilon = 1/Re$ и выяснить возможность построения регулярных асимптотических решений со шкалой $\{1/Re^\alpha\}$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение Навье — Стокса переходит в уравнение Эйлера

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P,$$

но для этого уравнения задача (3.1) будет сформулирована некорректно. Это связано с тем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ происходит понижение порядка дифференциального уравнения и в граничном условии

$$\bar{V} = 0 \rightarrow V_n = 0, \quad V_s = 0.$$

Одно из условий оказывается лишним. Снимая условие прилипания $V_s = 0$, переходим к модели идеальной жидкости. При рассмотрении модели в качестве предельной обнаруживаются различия в структуре общей и предельной моделей (в смысле числа граничных условий на поверхности S). В итоге мы приходим к известному результату: по математической модели Эйлера нельзя построить регулярное асимптотическое решение задачи (3.1).

В приведенных рассуждениях мы допустили грубость при осуществлении предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$. Более тонкий анализ показывает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ из (3.1) получаются две задачи: а) внешняя краевая задача для уравнений Эйлера; б) описываемая уравнениями Прандтля задача для области, близко прилегающей к поверхности (пограничный слой). Но это не улучшает ситуации с точки зрения структурной некорректности.

Второй большой класс задач со структурной некорректностью имеется в гидродинамике подводного крыла [62]. Особенность этих задач четко иллюстрируется сингулярным уравнением (2.4).

Рассмотрим регулярную часть ядра этого уравнения

$$G(x-s, \bar{h}) = \frac{(x-s)}{(x-s)^2 + 16\bar{h}^2}.$$

При $\bar{h} \rightarrow \infty$ $G(x-s, \bar{h}) \rightarrow 0$, а при $\bar{h} \rightarrow 0$ $G(x-s, \bar{h}) \rightarrow 1/(x-s)$, т. е. регулярная часть ядра переходит в сингулярное ядро Коши.

Если при конечных значениях \bar{h} $G(x-s, \bar{h}) \in C(-1 \div +1)$, то при предельных значениях $\bar{h} = 0$, $G(x-s, 0) \notin C(-1 \div +1)$ и выход ядра из класса непрерывных функций при $\bar{h} = 0$ определяет различную структуру предельной модели.

З а м е ч а н и е. Это свойство задач гидродинамики подводного крыла сыграло решающую роль для метода функциональных параметров. Проблема движения судов на малопогруженных подводных крыльях поставила задачу определения гидромеханических характеристик крыльев при малых \bar{h} . Из-за структурной некорректности нельзя было построить асимптотические решения со шкалой $\{\bar{h}^\alpha\}$, и решения типа (*) оказались мало полезными для приложений. В связи с этими трудностями и был развит метод функциональных параметров в гидродинамике подводного крыла (см. гл. 5).

Определенный интерес с точки зрения структурной некорректности представляют результаты А. Пуанкаре по теории нелинейных колебаний [99]. В его работах проблема сформулирована несколько в ином плане:

1) заранее постулируется характер движения системы (в частности, периодические колебания);

2) предельная модель описывает периодические колебания. Выясним свойства общей модели, необходимые для существования асимптотических периодических решений с нулевым приближением, даваемых предельной моделью.

Пусть общая математическая модель записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t, \varepsilon), \quad (3.2)$$

где $X(x, t, \varepsilon)$ — непрерывная периодическая вектор-функция времени и аналитическая функция параметров ε и x ; x — N -мерный вектор.

Предельную модель можно записать так:

$$\frac{dx_0}{dt} = X^0(x_0, t). \quad (3.3)$$

Пусть $x_0 = x_0(t)$ — периодическое решение предельной системы, а $x = x(t, \beta, \varepsilon)$ — периодическое решение системы (3.2). Положим, что периодическое решение системы (3.2) удовлетворяет начальным условиям $x(0, \beta, \varepsilon) = x_0(0) + \beta$. Теперь возникает задача выбора вектор-параметра β , зависящего от ε , обладающего свойством $\beta(\varepsilon) = 0/\varepsilon=0$ и приводящего к периодическим решениям общей модели с периодом T . Условия периодичности решения имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_s &= X_s(T, \beta_1, \dots, \beta_N, \varepsilon) - X_s(0, \beta_1, \dots, \beta_N, \varepsilon) = 0, \\ s &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно свойству правой части уравнения (3.2) функции Ψ_s будут аналитическими относительно β_1, \dots, β_N и ε при некоторых достаточно малых их значениях.

При $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = \varepsilon = 0$ функции Ψ_s обращаются в нуль в силу структуры начальных условий и периодичности предельного решения.

Если при $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = \varepsilon = 0$ якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_N)}{\partial(\beta_1, \dots, \beta_N)} \neq 0,$$

то из уравнения (3.4) можно получить единственную вектор-функцию β_0 , обладающую необходимыми свойствами. Этот результат формулируется в виде теоремы Пуанкаре.

Если для предельного решения функциональный определитель не обращается в нуль при $\beta_i = \varepsilon = 0$, то при достаточно малом ε существует одно и только одно периодическое решение исходной системы, обращающееся в предельное решение при $\varepsilon = 0$, и это решение будет аналитическим относительно ε .

§ 3.3. Локальная некорректность

В механике и физике широкое распространение получили различные линейризованные теории, основанные на допущении о малости возмущений.

При построении решений для немалых возмущений результаты линейризованных теорий можно считать первыми приближениями, и оценка их качества является важной. Однако часто линейризованные теории имеют точки локальной некорректности, что мешает им успешно выступать в роли первого приближения. Во введении приведен пример на локальные некорректности в задачах теории потенциала ускорений [63], типичный для многих проблем механики сплошной среды.

О п р е д е л е н и е. Если в предельной области Ω_0 существует конечное число p точек $g_i (i=1, 2, \dots, p)$, для которых $\varphi_0(g_i) \notin E(\Omega_0)$, то предельное состояние будет иметь p точек локальной некорректности.

Появление точек локальной некорректности связано с излишней идеализацией математической модели теории малых возмущений. Наиболее простой пример, иллюстрирующий это, дает теория тонкого крыла. В реальных условиях крыло самолета имеет конечную толщину, но в теории малых возмущений полагают, что углы атаки α и относительная толщина крыла малы, что позволяет перенести граничное условие неперетекания с поверхности крыла на его проекцию на ось x и в конечном итоге разделить задачу на две: о симметричном профиле (см. введение) и о тонком крыле. Здесь идеализация явления очевидна.

Для установления следствий этой идеализации кратко рассмотрим плоскую задачу о движении тонкого крыла. Соответствующая краевая задача имеет вид [63]:

$$\Delta\theta = 0, \quad g \in \Omega; \quad \theta_y = F(x), \quad x \in [-1 \div +1];$$

$$\theta = 0, \quad x = -1; \quad \theta \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Решение задачи дает оператор $A\gamma$:

$$\theta = A\gamma, \quad g \in \Omega,$$

где

$$A\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{R} \right)_{\eta=0} ds,$$

$$R = \sqrt{(x-s)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Интегральное уравнение задачи

$$N_0 A\gamma = F_1(x), \quad x \in [-1 \div +1], \quad N_0 = - \int_{-\infty}^x d\tau$$

после вычислений имеет известный вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(s)}{x-s} ds = F_1(x), \quad x \in [-1 \div +1]. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) можно записать так:

$$L_0\gamma = F_1(x), \quad x \in [-1 \div +1].$$

Сингулярный характеристический оператор $L_0\gamma$ имеет обратный оператор в четырех классах функций [23]:

- 1) a_0^0 —ограниченные на концах интервала (финитные) $[-1 \div +1]$;
- 2) a_0^∞ —ограниченные на конце $x = -1$ и неограниченные на конце $x = +1$ интервала $[-1 \div +1]$;
- 3) a_∞^0 —ограниченные на конце $x = +1$ и неограниченные на конце $x = -1$ интервала $[-1 \div +1]$;
- 4) a_∞^∞ —неограниченные на концах интервала $[-1 \div +1]$.

Выбор класса функций в общем случае определяется дополнительным условием, которое в изучаемой задаче записано в виде

$$\theta = 0, \quad x = -1$$

(постулат Жуковского — Чаплыгина), что и приводит к классу a_0^∞ . Для класса a_0^∞ решение имеет вид

$$\gamma(x) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-s}{1+s}} \frac{F_1(s)}{x-s} ds. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что в точке $x=1-\delta$ $\gamma(x) \sim M/\delta^{1/4}$, и точка $x=+1$ будет точкой локальной некорректности. Ее появление требует большой аккуратности при выборе асимптотического метода в этой задаче для получения результатов высших приближений. В частности, асимптотическое решение со шкалой

$\{\varepsilon^\alpha\}$ здесь будет непригодным, поскольку нельзя гарантировать в этом решении снижения (или хотя бы стабилизации) порядка особенности в высших приближениях. Более гибкие методы (например, ПЛГ) позволяют устранить этот недостаток.

З а м е ч а н и е. Для асимптотических решений в виде рядов по малому параметру задач, имеющих локальные некорректности, типичны рост области некорректности в высших приближениях и повышение порядка особенности в сингулярных решениях. Но часто ряды по малому параметру конструируются формально и решения в квадратурах не реализуются, в результате этот дефект не обнаруживается явно, а «тонет» в формализме общих преобразований. Поэтому такие решения не улучшают результат первого приближения.

§ 3.4. Некорректность в ограниченной области $\Omega_2 \subset \Omega$

Как следует из главы 1, при изучении эволюции системы асимптотическим методом рассматривается асимптотическое разложение оператора $L(\varepsilon)$ относительно шкалы сравнения $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$:

$$L(\varepsilon) = 1 + \sigma_1(\varepsilon)L_1 + \sigma_2(\varepsilon)L_2 + \sigma_3(\varepsilon)L_3 + \sigma_{\alpha-1}(\varepsilon)L_{\alpha-1} + O(\sigma_\alpha(\varepsilon)).$$

По определению предельной корректности операторы L_n ограничены для всех точек $g \in \Omega$. Однако возможны случаи, когда операторы L_n будут ограниченными для точек g , принадлежащих части области Ω . Если представить область Ω в виде $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, причем для точек $g \in \Omega_1$ операторы L_n ограничены, а для $g \in \Omega_2$ неограничены, то в области Ω_2 задача будет некорректной в предельном смысле (при выполнении всех остальных требований корректности).

Один из характерных примеров (появление вековых членов в задаче о нелинейных колебаниях) рассмотрен во введении. Как правило, некорректность в ограниченной области Ω_2 связана с дефектом асимптотического метода (точнее, с дефектом выбранного класса предельной корректности).

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ И МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Глава 4

РЕГУЛЯРНЫЙ КЛАСС ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

§ 4.1. Общие свойства регулярного класса предельной корректности

В главе 2 регулярный класс предельной корректности K_1 определен как класс с одной предельной моделью. Из этого определения следует, что для изучения поведения системы класса K_1 достаточно информации о состоянии системы при $\varepsilon=0$. На основании этого определим два основных свойства систем класса K_1 .

Теорема 1. В классе предельной корректности K_1 оператор $L(\varepsilon)$ допускает асимптотические разложения только относительно групповой или квазигрупповой шкалы.

По условию предельной корректности для предельной модели существует ограниченный оператор T_0^{-1} , восстанавливающий единственное предельное решение

$$\varphi_0 = T_0^{-1}\chi_0.$$

Действуя оператором T_0^{-1} на общую модель, получаем

$$T_0^{-1}T\varphi = T_0^{-1}\chi$$

или

$$T_1\varphi = \chi_1 \quad (T_0^{-1}T = T_1, \quad T_0^{-1}\chi = \chi_1). \quad (4.1)$$

Введем в рассмотрение некоторую шкалу сравнения $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$, относительно которой существуют разложения:

$$T_1 = 1 + \sigma_1(\varepsilon)T_1^1 + \sigma_2(\varepsilon)T_1^2 + \sigma_3(\varepsilon)T_1^3 + \dots + O(\sigma_\alpha(\varepsilon)),$$

$$\chi_1 = \chi_0 + \sigma_1(\varepsilon)\chi_1^1 + \sigma_2(\varepsilon)\chi_1^2 + \sigma_3(\varepsilon)\chi_1^3 + \dots + O(\sigma_\alpha(\varepsilon)),$$

$$\varphi = \varphi_0 + \sigma_1(\varepsilon)\varphi_1 + \sigma_2(\varepsilon)\varphi_2 + \sigma_3(\varepsilon)\varphi_3 + \dots + O(\sigma_\alpha(\varepsilon)).$$

В силу (4.1)

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \chi_0, \quad \sigma_1(\varepsilon)(\varphi_1 + \varphi_0 T_1^1) = \sigma_1(\varepsilon) \chi_1^1, \\ \sigma_2(\varepsilon)(T_1^2 \varphi_0 + \varphi_2) + \beta_1^1 \sigma_1^2(\varepsilon) T_1^1 \varphi_1 &= \sigma_2(\varepsilon) \chi_1^2,\end{aligned}$$

где

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_2(\varepsilon) = \sigma_1^2; \\ 0, & \text{если } \sigma_2(\varepsilon) = O(\sigma_1^2), \quad \beta < 2. \end{cases}$$

Если $\beta_1 = 1$, то, принимая $\sigma_2(\varepsilon) = \sigma_1^2(\varepsilon)$, уже имеем элемент шкалы, обладающий групповым свойством.

Если $\beta_1 = 0$, то необходимо рассмотреть следующие приближения до выполнения условия $\sigma_k(\varepsilon) = O(\sigma_1^k)$. Выполнение этого условия в k -м приближении позволит ввести в шкалу элемент $\sigma_k(\varepsilon) = \sigma_1^k(\varepsilon)$, характерный для квазигрупповой шкалы.

Последовательно приравнивая члены при одинаковых элементах шкалы сравнения, в силу уравнения (4.1) обнаружим, что элементы принятой шкалы сравнения $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$ обладают групповым или квазигрупповым свойством.

Поскольку функции $\varphi_n = L_n \varphi_0$, то разложению функции φ по принятой шкале будет соответствовать разложение оператора $L(\varepsilon)$ по той же шкале.

Теорема 2. *Если в классе предельной корректности K_1 оператор $L(\varepsilon) \in C^\infty(\bar{M}_0)$, $\bar{M}_0 \subseteq M_0 \subseteq [0 \div \infty)$, то он допускает асимптотические разложения относительно групповых шкал.*

Ввиду принадлежности $L(\varepsilon)$ пространству $C^\infty(M_0)$ в окрестности $\varepsilon = 0$ этого оператора возможно разложение в виде ряда Тейлора

$$L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon L'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} L''(0) + \frac{\varepsilon^3}{3!} L'''(0) + \dots + O(\varepsilon^N). \quad (4.2)$$

Вместе с разложением (4.2) рассмотрим также разложение оператора $L(\varepsilon)$ по произвольной шкале сравнения

$$L(\varepsilon) = 1 + \sigma_1(\varepsilon) L_1 + \sigma_2(\varepsilon) L_2 + \sigma_3(\varepsilon) + \dots + O(\sigma_k(\varepsilon)). \quad (4.3)$$

Но согласно (4.2) шкала $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$ может иметь свойство

$$\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\} \rightarrow \{\varepsilon^\alpha\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поскольку малая шкала $\{\varepsilon^\alpha\}$ обладает групповым свойством, шкала $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$ также будет иметь это свойство.

§ 4.2. Идея метода функциональных параметров

Малой шкале сравнения $\{\varepsilon^\alpha\}$ соответствует асимптотическое разложение оператора $L(\varepsilon)$. Ясно, что в этом случае $M_0^1 \subseteq \subseteq [0 \div a)$, ($a < 1$), и такой асимптотический метод будет пригоден только для малых значений параметра ε .

Это существенный недостаток метода, поскольку для приложений интерес представляют большие (или произвольные) значения параметра, а выбор в качестве шкалы сравнения $\{1/\varepsilon^\alpha\}$ невозможен из-за предельной некорректности. Возникает важная проблема развития регулярных асимптотических методов для решения задач с произвольными параметрами.

Для задач, асимптотическое решение которых существует в регулярном классе корректности K_1 с групповой шкалой, успешное решение этой проблемы дает метод функциональных параметров [78], исходные концепции которого таковы:

1. Для системы S существует (или может быть построено) разложение оператора $L(\varepsilon)$ относительно малой шкалы сравнения $\{\varepsilon^\alpha\}$, однако это решение будет неудовлетворительным вследствие малости интервала $M_0^1 \subseteq [0 \div a]$, ($a < 1$).

2. Из теоремы 2 следует, что для $L(\varepsilon) \in C^\infty(M_0)$, кроме шкалы $\{\varepsilon^\alpha\}$, могут существовать групповые шкалы $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$, относительно которых возможно разложение оператора $L(\varepsilon)$.

3. Ставится задача: из всех групповых шкал сравнения $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$ выбрать такую, относительно которой асимптотическое разложение оператора $L(\varepsilon)$ пригодно для параметрического интервала M_0 , большего, чем интервал M_0^1 .

Решение этой задачи простым путем редуцируется к задаче выбора отображения Π , осуществляющего переход $M_0 \rightarrow M_0^1$ ($M_0 \subseteq [0 \div a_1]$, $a_1 > a$).

Если для групповой шкалы ввести базовый элемент $\sigma_1(\varepsilon)$, то ее можно записать в виде

$$\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\} = \{\sigma_1^\alpha(\varepsilon)\}.$$

Таким образом, для формирования групповой шкалы достаточно знать только базовый элемент $\sigma_1(\varepsilon)$.

Рассматривая базовый элемент как некоторый новый функциональный параметр $\tau = \sigma_1(\varepsilon)$, можно записать $\tau = \Pi\varepsilon$. Если $\sigma_1(\varepsilon) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \subset (0 \div a)$ и $\sigma_1(a_1) \leq 1$,

то шкала $\{\sigma_1^\alpha(\varepsilon)\}$ предпочтительнее шкалы $\{\varepsilon^\alpha\}$.

Заметим, что нужными свойствами обладает не только один элемент Π , в связи с чем можно ввести множество отображений $\bar{\Pi} (\Pi \in \bar{\Pi})$. В этом случае задача выбора рациональной шкалы $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$, улучшающей качество отображений, редуцируется к задаче выбора рационального отображения $\Pi \in \bar{\Pi}$.

Итак, в методе функциональных параметров:

1. Задача выбора рациональной шкалы сравнения $\{\sigma_\alpha(\varepsilon)\}$ редуцируется к задаче выбора отображения $\Pi \in \bar{\Pi}$, обладающего свойствами:

$$а) \tau = \Pi\varepsilon, \quad \varepsilon \in M_0, \quad M_0 \subset [0 \div a_1], \quad a_1 > 1, \quad \tau \in [0 \div 1];$$

$$б) \tau \rightarrow g\varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad g > 0.$$

2. Строится разложение оператора $L(\varepsilon)$ относительно шкалы сравнения $\{\tau^\alpha\}$:

$$L(\varepsilon) = 1 + \tau L_1 + \tau^2 L_2 + \tau^3 L_3 + \dots + O(\tau^N). \quad (4.4)$$

З а м е ч а н и е. В развитом в настоящее время варианте метода функциональных параметров рассматривается интервал $M_0 \subseteq [0 \div \infty)$ и отображение Π имеет свойства:

- а) $\tau = \Pi\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0 \div \infty)$;
 б) $\tau \rightarrow g\varepsilon, \quad \tau \in [0 \div 1], \quad g > 0,$
 $\varepsilon \rightarrow 0.$

В дальнейшем без специальных разъяснений будет рассматриваться именно этот вариант метода, поскольку в его рамках в ряде задач удастся получить асимптотические решения, пригодные для любых значений параметра ε . Заметим также, что эта реализация метода открыла возможности его обобщения для терминального класса корректности K_2 (см. гл. 8).

Наглядную иллюстрацию идеи метода функциональных параметров можно дать путем перехода к параметрической плоскости комплексного переменного. Вместе с действительным параметром ε введем в рассмотрение комплексный параметр $\varepsilon_1 = \varepsilon + i\varepsilon^1$.

Пусть область G в плоскости комплексного переменного ε_1 есть область аналитичности оператора $L(\varepsilon_1)$. Отобразим конформно область G на некоторую каноническую область G_1 (например, единичный круг) с помощью отображения $\Pi_1 = \Pi + i\Pi^1$, тогда в плоскости комплексного переменного $\tau_1 = \tau + i\tau^1$ в области G_1 можно построить асимптотическое разложение оператора $L^1(\tau_1)$:

$$L^1(\tau_1) = 1 + \tau_1 L_1^1 + \tau_1^2 L_2^1 + \dots + O(\tau_1^N). \quad (4.5)$$

По свойству аналитических функций это разложение будет сходиться внутри канонической области G_1 , и переход в конечных результатах к разложению (4.4) путем выделения действительной части $L(\tau) = \text{Re}L^1(\tau_1)$ обеспечит нужное асимптотическое разложение.

Заметим, что именно идеи анализа разложения в плоскости комплексных переменных ε_1 и τ_1 и были заложены в первых работах по методу функциональных параметров (см. § 4.3 и 4.4).

§ 4.3. Краткие исторические сведения

В своем четвертом мемуаре [89] А. Пуанкаре предложил искать решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в виде рядов по степеням параметра

$$\tau = \frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}, \quad \frac{ds}{dt} = f[1 + \Sigma X_i^2(x)], \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_j, \dots).$$

Эта работа послужила отправной точкой цикла исследований по теории асимптотически-устойчивых систем, описываемых дифференциальными уравнениями [30, 42, 43, 87].

Характерной особенностью этих работ (как и работы А. Пуанкаре) является то, что авторы не классифицируют построенные ими решения как асимптотические и в них не обсуждаются вопросы корректности в предельном смысле.

Р. Беллман [14] для улучшения асимптотических решений в задаче о нелинейных колебаниях предложил применять параметр вида $\tau = \epsilon / (1 + \epsilon)$.

Четко концепция метода функциональных параметров как асимптотического метода была сформулирована и апробирована в работах по гидродинамике подводного крыла [62]. Для этих работ общепринятым является функциональный параметр

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{4\epsilon^2} + 1} - \frac{1}{2\epsilon}.$$

Следует также отметить, что в численном анализе нашли распространение родственные идеи замены переменных с целью расширения области применения различных приближенных методов [31, 39].

В целом для всех работ характерно то, что переход к функциональным параметрам всегда приводил к эффективным результатам.

§ 4.4. Функциональный параметр в гидродинамике подводного крыла

Как было отмечено в § 4.2, имеется множество $\bar{\Pi}$, содержащее элементы Π , которые отображают интервал $M_0 \subseteq [0 \div \infty)$ в малый интервал $M_\tau \subseteq [0 \div 1)$, и выбор единственного элемента Π необходимо осуществлять исходя из определенных соображений (часто физического плана), связанных со спецификой конкретной проблемы. Это свойство показывает большую гибкость метода функциональных параметров в смысле его подстройки к определенному классу физических проблем.

С этой точки зрения интересны соображения, положенные в основу выбора функционального параметра в гидродинамике подводного крыла и теории потенциала ускорений. Как прави-

ло, эти соображения возникают при анализе одной из простейших задач и потом оказываются пригодными для многих из них.

В качестве примера была рассмотрена плоская задача о движении крыла под свободной поверхностью жидкости (при $F\gamma \rightarrow \infty$). Как известно (см. введение), эта задача редуцируется к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) \left[\frac{1}{x-s} + \frac{(x-s)}{(x-s)^2 + 4\epsilon^2} \right] ds = F(x),$$

$$x \in [-1 \div +1), \quad \epsilon = 4\bar{h}.$$

Ясно, что задача о подводном крыле имеет смысл, когда крыло находится в нижней полуплоскости плоскости комплексного переменного $z = x + iy$.

Если ввести функциональный параметр, удовлетворяющий условию $\tau < 1$ во всей нижней полуплоскости и связанный с погружением крыла \bar{h} , то можно попытаться найти асимптотическое решение сингулярного интегрального уравнения со шкалой $\{\tau^\alpha\}$.

Рассмотрев функцию, отображающую внешность цилиндра радиуса R на внешность тонкой пластинки, и установив связь между точками, находящимися на мнимой оси плоскости цилиндра и плоскости пластинки, имеем:

$$f(z) = z + \frac{R^2}{z}, \quad z_0 = iH, \quad ih = i\left(H - \frac{R^2}{H}\right).$$

Положим

$$\bar{H} = \frac{H}{R}, \quad \bar{h} = \frac{h}{4R}.$$

Тогда

$$4\bar{h} = \bar{H} - \frac{1}{\bar{H}}, \quad \frac{1}{\bar{H}} = \sqrt{4\bar{h}^2 + 1} - 2\bar{h}.$$

Очевидно, что параметр $\tau = 1/\bar{H}$ удовлетворяет поставленным условиям и обладает свойством

$$1/\bar{H} \rightarrow 1/(4\bar{h}), \quad \bar{h} \rightarrow \infty.$$

Здесь \bar{H} — относительное погружение цилиндра ($\bar{H} \geq 1$ в нижней полуплоскости).

Таким образом, если в первых работах по гидродинамике подводного крыла в качестве параметра рассматривается величина $\epsilon_1 = 1/2\bar{h}$, то в работах по методу функциональных параметров — функциональный параметр $\tau = 1/\bar{H}$ [62].

В общем случае для этого класса характерен параметр вида

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{q^2 \epsilon_1^2} + 1} - \frac{1}{q \epsilon_1},$$

где $\epsilon \in [0 \div \infty)$ — физический параметр, q — параметр отображения.

З а м е ч а н и е. Параметр отображения q играет важную роль в методе функциональных параметров. Его основное назначение — регулировать (улучшать) качество асимптотических разложений в конкретных задачах. Умелый выбор параметра q может обеспечить хорошую асимптотику в низших приближениях, тогда как при плохом его выборе потребуются вычисление большого числа членов соответствующих асимптотических разложений.

Таким образом, параметр q является характерным для метода функциональных параметров и его выбор следует производить на основе соображений, связанных с эффективностью асимптотического алгоритма.

§ 4.5. Регулярные асимптотические алгоритмы метода функциональных параметров — алгоритмы упорядоченной итерации

Рассмотрим вопрос об интерпретации регулярных асимптотических алгоритмов как алгоритмов упорядоченной итерации на примере системы, описываемой интегральным уравнением

$$L_0\gamma + L_1\gamma = F, \quad (4.6)$$

где $L_0\gamma$ — сингулярный характеристический интегральный оператор, $L_1\gamma$ — вполне непрерывный оператор.

Пусть существует обратный оператор L_0^{-1} , тогда уравнение (4.6) регуляризируется методом Карлемана — Векуа:

$$\gamma = \gamma_0 + k\gamma, \quad (4.7)$$

где

$$\gamma_0 = L_0^{-1}F, \quad k\gamma = -L_0^{-1}L_1\gamma.$$

Если $\|k\gamma\| \leq \alpha\|\gamma\|$ и $\alpha < 1$, то по принципу сжимающих отображений существует решение уравнения (4.7), которое можно получить методом итераций.

Строя последовательность $\gamma_i (i=0, 1, \dots, n)$, имеем:

$$\bar{\gamma} = \gamma_0, \quad \bar{\gamma}_1 = \gamma_0 + k\gamma_0, \quad \bar{\gamma}_2 = \gamma_0 + k\bar{\gamma}_1, \quad \dots, \quad \bar{\gamma}_n = \gamma_0 + k\bar{\gamma}_{n-1}. \quad (4.8)$$

Если существует параметр τ , такой, что $\|k\gamma\| \in O(\tau)$, то можно ввести шкалу $\{\tau^\alpha\}$ и искать решение (4.7) в виде асимптотического ряда

$$\gamma = \gamma_0 + \tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2 + \dots + O(\tau^n). \quad (4.9)$$

Введем обозначение

$$\tilde{\gamma}_N = \gamma_0 + \tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2 + \dots + \tau^N\gamma_N,$$

Подводное крыло в плоскопараллельном потоке. Если для крыла самолета плоская задача о движении тонкого крыла сводится к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(s)}{(x-s)} ds = F(x), \quad x \in [-1 \div +1], \quad (5.4)$$

решение которого существует в замкнутом виде, то для подводного крыла эта задача сводится к уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) \left[\frac{1}{(x-s)} + G(x-s, \bar{h}, Fr) \right] ds = F(x), \quad x \in [-1 \div +1]. \quad (5.5)$$

Функция $G(x-s, \bar{h}, Fr) \in C([-1 \div +1])$ определяет специфику задач в теории подводного крыла.

Для пояснения трудностей исследования уравнения (5.5) запишем в явном виде функцию $G(x-s, \bar{h}, Fr)$ для крыла под свободной поверхностью, движущегося с большими числами Фруда:

$$G(x-s, \bar{h}) = \frac{(x-s)}{(x-s)^2 + 16\bar{h}^2}, \quad G(x-s, \bar{h}) \rightarrow \frac{1}{x-s}, \quad \bar{h} \rightarrow 0,$$

и регулярная часть ядра уравнения переходит в сингулярное ядро Коши. Поэтому предел $\bar{h} \rightarrow 0$ (наиболее интересный для приложений) оказался некорректным. Это и определило место метода функциональных параметров в гидродинамике подводного крыла. Функциональный параметр в этой теории оказался тесно связанным с физическим существом проблемы.

В плоских задачах гидродинамики подводного крыла основной интерес представляет задача о влиянии свободной поверхности на подъемную силу подводного крыла. Обычно это влияние определяют функцией

$$\Psi = \frac{\int_{-1}^{+1} \gamma(s) ds}{\int_{-1}^{+1} \gamma_0(s) ds} = \frac{C_{y\bar{h}}}{C_{y\infty}}.$$

Для подводного крыла в форме дужки функция Ψ получена в виде

$$\Psi = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_k}\right) \tau^2 + \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_k}\right) \tau^4 - \\ - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{13\alpha_0}{12\alpha_0 + \alpha_k}\right) \tau^6 + O(\tau^8),$$

где α_0 — угол нулевой подъемной силы, α_k — кромочный угол атаки.

Подробно теория подводного крыла в плоскопараллельном потоке изложена в монографии [62].

Подводное крыло большого удлинения. Вторым характерным примером, в котором удалось на основе метода функциональных параметров развить соответствующую теорию, является теория подводного крыла конечного размаха. Для крыла самолета эта задача сводится к известному уравнению Прандтля

$$\Gamma(y) = \frac{a_\infty}{2\lambda(y)} \left[\alpha(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Gamma'(\eta)}{(y-\eta)} d\eta \right], \quad y \in [-1 \div +1].$$

Основное интегродифференциальное уравнение подводного крыла большого удлинения (крыло под свободной поверхностью) имеет вид:

$$\Gamma(y) = \frac{a_\infty \Psi}{2\lambda(y)} \left\{ \alpha(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Gamma'(\eta) \left[\frac{1}{(y-\eta)} + G(y-\eta) \right] d\eta \right\},$$

$$G(y) = \operatorname{Re} \left\{ 2\omega i \int_0^\infty \frac{\lambda+i}{\lambda} \exp \left[-i\omega(\lambda+1) \left(y \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} - 4\bar{h}\lambda i \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{d\lambda}{y - 4i\bar{h}\lambda} \right\}, \quad \omega = 1/2Fr^2.$$

Принимая разложение

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \tau_1^{2n}, \quad \tau_1 = \sqrt{4\bar{h}^2 + 1} - 2\bar{h}, \quad \bar{h}_\lambda = \frac{\bar{h}}{\lambda},$$

решение интегродифференциального уравнения следует искать в виде асимптотического ряда

$$\Gamma(y) = \Gamma_0(y) + \tau_1^2 \Gamma_1(y) + \tau_1^4 \Gamma_2(y) + \dots + O(\tau_1^6).$$

Уравнения для функций $\Gamma_i(y)$ имеют форму уравнений крыла самолета и могут быть решены методами аэродинамики. В частности, для крыла с эллиптическим распределением нагрузки получены формулы для угла схода потока и коэффициентов C_y и C_x :

$$C_y = \frac{\Psi a_\infty}{1 + \frac{\Psi a_\infty}{\pi\lambda} \zeta} (\alpha_0 + \alpha_k), \quad C_x = \frac{C_y^2}{\pi\lambda} \zeta,$$

где ζ — функция, определяющая влияние свободной поверхности на угол схода потока крыла конечного размаха.

Одна из формул для ζ (при $Fr \rightarrow \infty$), полученная А. Н. Панченковым и В. А. Степановым, имеет вид

$$\zeta = 1 + 0,5\tau_1^2 + 0,25\tau_1^4 + 0,0125\tau_1^6 + 0,0469\tau_1^8 + 0,0257\tau_1^{10} + \\ + 0,0188\tau_1^{12} + O(\tau_1^{14}).$$

Многообразие задач теории подводного крыла (например, крыло под свободной поверхностью, крыло на мелководье, крыло над и под границей раздела сред, взаимодействие крыльев и т. д.) свидетельствует о том, что эта теория обстоятельно изучалась многими авторами и в настоящее время имеет вполне законченный вид.

Подводное крыло малого удлинения. Решения краевых задач теории подводного крыла малого удлинения также редуцируют эти задачи к уравнениям (5.5) с той только разницей, что в дальнейшем их решения ищутся в классе $\gamma \in a_0^0$, тогда как в плоских задачах — в $\gamma \in a_0^\infty$.

В приложениях также необходима информация о коэффициентах подъемной силы и индуктивного сопротивления; соответствующие формулы имеют вид:

$$C_y = \frac{\pi}{2} \lambda \Psi \cdot \alpha, \quad C_{xi} = \frac{C_y^2}{\pi \lambda \Psi},$$

$$\Psi = 1 + \frac{1}{2} \tau_1^2 + \frac{1}{2} \tau_1^4 + \frac{9}{16} \tau_1^6 + \frac{31}{64} \tau_1^8 + O(\tau_1^{10}), \quad Fr \rightarrow 0;$$

$$\Psi = 1 - \frac{1}{2} \tau_1^2 + \frac{1}{16} \tau_1^6 - \frac{1}{16} \tau_1^{10} + O(\tau_1^{12}), \quad Fr \rightarrow \infty.$$

Некоторые затруднения в теории подводного крыла малого удлинения были вызваны внесением упрощений, определяемых малостью удлинения. При больших скоростях движения эти упрощения вносились формально путем обобщения соответствующих приемов аэродинамики (на основе гипотезы плоских сечений). Однако для произвольных чисел Фруда гипотеза плоских сечений оказалась непригодной, и возникал вопрос о методе внесения упрощения в эту теорию.

Решить этот вопрос удалось автору на основе теории корректности в предельном смысле. Было установлено, что задача о подводной несущей поверхности имеет корректный ($\lambda \rightarrow 0$) предел (для несущей поверхности в безграничной жидкости это устанавливается просто), и этот факт был положен в основу упрощения.

Пусть течение вокруг подводной несущей поверхности описывает интегральный оператор

$$\Psi_\lambda = \frac{1}{4\pi} \int_s \gamma(\rho) G\left[\frac{(x-\xi)}{\lambda}, (y-\eta)\right] ds. \quad (5.6)$$

Пусть также функция G имеет корректные пределы:

$$G\left[\frac{(x-\xi)}{\lambda}, (y-\eta)\right] = 2G_0\left[\frac{(x-\xi)}{\lambda}, (y-\eta)\right], \quad \frac{(x-\xi)}{\lambda} \rightarrow -\infty;$$

$$G\left[\frac{(x-\xi)}{\lambda}, (y-\eta)\right] = 0, \quad \frac{(x-\xi)}{\lambda} \rightarrow +\infty,$$

тогда при $\lambda \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda &= \frac{1}{4\pi} \int_s \gamma(\rho) [1 - \text{sign}(x - \xi)] G_0\left[\frac{(x-\xi)}{\lambda}, (y-\eta)\right] ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_x^{-1} \gamma(\rho) G_0\left[\frac{(x-\xi)}{\lambda}, (y-\eta)\right] ds. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эта формула и лежит в основе представления гидродинамических потенциалов подводного крыла малого удлинения в существующей теории.

§ 5.3. Теория потенциала ускорений и метод функциональных параметров

Для приложения и развития метода функциональных параметров интересной является активно развивающаяся в последние годы теория потенциала ускорений. Это связано с тем, что в этой теории имеется ряд конкретных проблем, в которых наблюдается явление некорректности. В гидроаэродинамике одно из важных мест занимают задачи движения тела с вихревыми возмущениями на бесконечности за телом. Значение этого направления определяется практическим интересом соответствующих задач (например, крыло самолета), а своеобразие физической картины течения определяет специфику математического аппарата теории. Основные трудности теории связаны с вихревым следом, образующимся за телом, и это определило то, что до последнего времени широко использовались различные вихревые модели, основанные на феноменологических соображениях. Предложения о необходимости строгой математической теории несущей поверхности выдвигались еще в 40-х годах, однако целесообразность и важность такой теории стали очевидны в связи с развитием гидродинамики подводного крыла, теории суперкавитирующего винта и т. д.

В этих теориях не удалось построить четкую физическую картину течения, поэтому и возникла необходимость обращения непосредственно к уравнениям гидродинамики. Целесообразность развития математической теории несущей поверхности в пространстве потенциала ускорений определялась тем, что в терминах потенциала ускорений граничные условия на полубесконечной поверхности вихревых возмущений оказались тривиальными.

Чтобы проследить связь метода функциональных параметров с теорией потенциала ускорений, приведем некоторые сведения из формализма теории потенциала ускорений [63].

1. Теория потенциала ускорений — теория малых возмущений. Если течение идеального газа удовлетворяет уравнению

$$T\varphi = 0, \quad g \in \Omega_1; \quad \varphi \in C^2(\Omega_1), \quad \Omega_1 \subset \Omega,$$

то потенциал ускорений θ удовлетворяет уравнению

$$TN\theta = 0, \quad g \in \Omega, \quad \theta \in C^2(\Omega),$$

но для произвольных возмущений отображение N не построено в явном виде.

В теории малых возмущений N — линейное отображение, и потенциал ускорений также удовлетворяет уравнению $T\theta = 0$.

2. Формальная теория потенциала ускорений развивается с помощью интегральных операторов $A_i\gamma_i$ с областью определения в пространстве $L_1(S_p)$ и областью значений в пространстве $C^2(\Omega)$ и свойствами:

$$TA_i\gamma_i = 0, \quad g \in \Omega;$$

$$A_1\gamma_{1+} = \bar{A}_1\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_1, \quad g \in S_{p+};$$

$$A_1\gamma_{1-} = \bar{A}_1\gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_1, \quad g \in S_{p-};$$

$$A_{1z}\gamma_{1+} = A_{1z}\gamma_{1-} = \bar{A}_{1z}\gamma_1, \quad g \in S_p;$$

$$A_2\gamma_{2+} = A_2\gamma_{2-} = \bar{A}_2\gamma_2, \quad g \in S_p;$$

$$A_{2z}\gamma_{2+} = \bar{A}_{2z}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_2, \quad g \in S_{p+};$$

$$A_{2z}\gamma_{2-} = \bar{A}_{2z}\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_2, \quad g \in S_{p-}.$$

Конкретная структура операторов $A_i\gamma_i$ определяется условиями на ограничивающей поверхности и размерностью пространства

$$R^k (\Omega \subset R^k).$$

Решение краевых задач в пространстве потенциала ускорений дается линейным агрегатом

$$\theta = A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2, \quad g \in \Omega.$$

Класс краевых задач теории достаточно обширен, простейшая задача о несущей поверхности в безграничной жидкости имеет формулировку:

$$\Delta\theta = 0, \quad g \in \Omega; \quad \theta_z = F(g), \quad g \in S_p; \quad \theta_+ - \theta_- = 0, \\ g \in L; \quad \theta \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Здесь L — выходящая кромка несущей поверхности.

Система интегральных уравнений задачи имеет вид:

$$\bar{A}_{1z}\gamma_1 + \bar{A}_{2z}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_2 = F_+(g), \quad g \in S_{p+};$$

$$\bar{A}_{1z}\gamma_1 + \bar{A}_{2z}\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_2 = F_-(g), \quad g \in S_{p-},$$

или

$$\gamma_2 = -[F(g)] = F_-(g) - F_+(g), \quad g \in S_p;$$

$$\bar{A}_{1z}\gamma_1 = F_0(g) - \bar{A}_{2z}\gamma_2 = F_1(g);$$

$$F_0(g) = \frac{F_+(g) + F_-(g)}{2}.$$

Член $\bar{A}_{2z}\gamma_2$ интерпретируется как некоторая динамическая кривизна профиля, и в частном случае несущей поверхности в безграничной жидкости он равен нулю.

3. В пространстве потенциала ускорений решение определяется с точностью до сингулярного.

Примеры построения интегрального оператора $A_1\gamma_1$ в случае плоского потока показывают, что ядро интегрального уравнения имеет особенность порядка $\alpha=2$ и решение уравнения существует только для $\gamma_1(g) \in C_0^1(S_p)$.

Поскольку N^{-1} — дифференциальный оператор, а интегральное уравнение дает только регулярные решения, можно ожидать теряемого при отображении $\varphi \rightarrow \theta$ сингулярного решения, которое определяется из уравнения в пространстве потенциала скоростей

$$N\bar{A}_{1z}\gamma_1 = F_1(g), \quad g \in S_p. \quad (5.8)$$

Это уравнение и является основным для применения метода функциональных параметров, в частности интегральные уравнения п. 1 — конкретные реализации уравнения (5.8).

Подробно теория потенциала ускорений изложена в [63], а здесь мы кратко рассмотрим уравнения несущей поверхности в безграничной жидкости:

Если принять $A_2\gamma_2 \equiv 0$, а

$$A_1\gamma_1 = A\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma(\rho) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(\rho-g)} ds, \quad g \in \Omega,$$

то уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{S_p} \frac{\gamma(\rho)}{(y-\eta)} \left[1 - \frac{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)} \right] ds = -F(g), \quad g \in S_p.$$

Для дальнейших исследований это уравнение удобнее записать в таком виде:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\gamma}(\rho)}{(y-\eta)} \left[1 - \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \lambda^2(\eta)(y-\eta)^2}}{(x-\xi)} \right] d\xi d\eta = -F(g). \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) еще не имеет замкнутого решения и является предметом многочисленных исследований. Отметим, что функция $\gamma(\rho)$ обладает свойствами

$$\bar{\gamma}(\rho) \in C_0^1(S_{\rho_2}), \quad \eta \in S_{\rho_2}.$$

Одной из интересных задач, связанных с (5.9), является задача построения одномерных аппроксимаций [63], которые наиболее просто вводятся для предельных случаев ($\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$). Для этого принимают аппроксимации радикала

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + \lambda^2(\eta)(y-\eta)^2} = \begin{cases} \lambda(\eta)|y-\eta|, & \lambda \rightarrow \infty; \\ |x-\xi|, & \lambda \rightarrow 0. \end{cases}$$

Аппроксимация $\lambda \rightarrow \infty$ приводит к уравнению Прандтля (см. п. 1), а аппроксимация $\lambda \rightarrow 0$ — к уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_\eta(\eta, x)}{(y-\eta)} d\eta = F(g),$$

где

$$\Phi_\eta(\eta, x) = \int_x^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{\gamma}(\rho) d\xi.$$

Заметим, что аппроксимация $\lambda \rightarrow \infty$ пригодна в областях, где выполняется условие

$$\lambda \left| \frac{y-\eta}{x-\xi} \right| \gg 1.$$

Но на поверхности S_ρ существуют области $|y-\eta| \sim O(1/\lambda)$, в которых это условие не выполняется, и теория, основанная на уравнениях Прандтля, является некорректной в предельном смысле. Исследование теории Прандтля с позиций теории сингулярных возмущений выполнил Ван-Дайк [22]. Однако теория крыла малого удлинения оказывается корректной в предельном смысле. Это можно разумно использовать для построения теории крыла среднего удлинения. Поскольку теория крыла малого удлинения является корректной в предельном смысле, можно искать решение задачи в виде ряда

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda^2 \varphi_1 + \lambda^4 \varphi_2 + \dots + O(\lambda^{2k}),$$

где φ_0 — решение по теории крыла малого удлинения.

Если $\|\varphi_0\| \sim \|\varphi\|$, то ряд может дать сходящиеся результаты для $\lambda < 1$.

Приведенный выше ряд незначительно расширяет границы применимости теории, и можно искать решение задачи методом функциональных параметров, принимая

$$\tau_\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2\lambda}.$$

Для исследования вопроса о сходимости рядов по τ_λ была изучена одна простейшая задача.

Если к общему интегральному уравнению плоской несущей поверхности в безграничной жидкости применить метод коллокаций и взять первое приближение (одну несущую линию), то уравнение будет иметь вид

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Gamma'(\eta)}{y - \eta} d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Gamma'(\eta)}{y - \eta} [1 - \sqrt{1 + \lambda^2(\eta)(y - \eta)^2}] d\eta. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) дает правильные предельные значения: при $\lambda \rightarrow \infty$ — теорию Прандтля и при $\lambda \rightarrow 0$ — суммарную циркуляцию крыла малого удлинения. При $\lambda \rightarrow 0$ имеем вырожденное уравнение

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Gamma'(\eta)}{y - \eta} d\eta. \quad (5.11)$$

При сравнении различных теорий будем исходить из эллиптического распределения циркуляции по размаху крыла

$$\Gamma(y) = k \sqrt{1 - y^2}.$$

По теории Прандтля коэффициент k имеет вид

$$k_1 = \frac{4}{\lambda \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)}. \quad (5.12)$$

Из (5.11) следует $k=1$, а при $\lambda \rightarrow 0$ коэффициент (5.12) k_1 имеет значение 2.

Можно искать решение в виде ряда

$$\Gamma(\eta) = \Gamma_0(\eta) + \lambda^2 \Gamma_1(\eta) + \lambda^4 \Gamma_2(\eta) + \dots,$$

но такое решение будет ограничено значениями $\lambda < 1$.

Ограничимся в этих вычислениях учетом только первого члена, содержащего λ^2 . Положим

$$\sqrt{1 + \lambda^2(\eta)(y - \eta)^2} \simeq 1 + \frac{\lambda^2}{2} (y - \eta)^2.$$

При такой аппроксимации коэффициент k имеет значение

$$k_2 = \frac{1}{1 + \lambda^2/8}.$$

Введем параметр τ_λ :

$$\tau_\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\lambda}.$$

Если ограничиться аппроксимацией

$$\sqrt{1 + \lambda^2(y - \eta)^2} = 1 + \lambda\tau_\lambda(y - \eta)^2,$$

то для k получим значение

$$k_3 = 1 / \left(1 + \frac{\lambda\tau_\lambda}{4}\right).$$

При $\lambda \rightarrow \infty$, $k_3 = k_1 = 4/\lambda$ решение методом функциональных параметров дает правильные предельные значения и при больших относительных удлинениях крыла.

От коэффициента k_i легко перейти к коэффициенту подъемной силы крыла предельного удлинения

$$C_y = 2\pi\lambda / \left[4 \left(1 + \frac{\lambda\tau_\lambda}{4}\right)\right] \alpha.$$

С учетом влияния вязкости в расчетах принимают вместо 2π величину $a_\infty = 5,45$ и тогда

$$C_y = a_\infty\lambda / \left[4 \left(\frac{a_\infty}{2\pi} + \frac{\lambda\tau_\lambda}{4}\right)\right] \alpha.$$

Таким образом, элементарный расчет показывает, что метод функциональных параметров может дать удовлетворительные результаты для всех удлинений крыла. Нами рассмотрено решение уравнения (5.10) в виде ряда

$$\Gamma(y) = \Gamma_0(y) + \tau_\lambda\Gamma_1(y) + \tau_\lambda^2\Gamma_2(y) + \dots + O(\tau_\lambda^3).$$

Сопоставление полученных результатов с известными численными решениями подтвердило вывод о том, что для крыльев среднего удлинения ($\lambda \leq 4$) асимптотическая теория достаточно точно определяет гидромеханические характеристики крыла конечного размаха.

Подробное изложение всех вопросов, рассмотренных в настоящей главе, содержится в наших монографиях [62, 63].

З а м е ч а н и е. Были рассмотрены в общих чертах некоторые проблемы теории потенциала ускорений. Однако, с точки зрения теории предельной корректности, в теории потенциала ускорений имеются проблемы, заслуживающие более глубокого изучения в рамках настоящей монографии. Эти проблемы будут рассмотрены в главе 9.

МЕТОД ПРОСТРАНСТВА МАЛОГО ВРЕМЕНИ

§ 6.1. Общие соотношения метода

Как отмечалось в главе 5, существует неединственный элемент, осуществляющий отображение физического параметрического интервала в малый функциональный интервал, и выбор структуры функционального параметра, как правило, зависит от особенностей того или иного класса задач. В этом смысле характерен класс задач теории нестационарных процессов.

В теории нестационарных процессов получил развитие новый вариант метода функциональных параметров, названный методом пространства малого времени, в котором в качестве параметрического интервала рассматривается временной интервал $I \subseteq [0 \div \infty)$.

Взяв элемент $\Pi_i \in \bar{\Pi}$, осуществляющий отображение $I \rightarrow I_1$ ($I_1 \subseteq [0 \div 1)$), можно ввести малое время $\tau = \Pi_i t$ и применить метод функциональных параметров к изучению нестационарных процессов.

Пусть нестационарный процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = B\varphi, \quad g \in \Omega, \quad \varphi \in E(\Omega), \quad t \in I. \quad (6.1)$$

В пространстве малого времени (6.1) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} F(\tau) = B\varphi, \quad g \in \Omega, \quad \varphi \in E(\Omega), \quad \tau \in I_1, \quad (6.2)$$

где

$$F(\tau) = \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\Pi t}{dt}.$$

Функция $F(\tau)$ должна удовлетворять условию

$$F(\tau) \rightarrow c, \quad \tau \rightarrow 0, \quad c > 0.$$

Основной задачей метода пространства малого времени является задача развития математического аппарата построения решения задачи Коши и начально-краевых задач для уравнений типа (6.2) в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \tau^2\varphi_2 + \tau^3\varphi_3 + \dots + O(\tau^N). \quad (6.3)$$

Эту задачу можно сформулировать и в более общем случае, когда задан обобщенный оператор $T\varphi = \chi$, зависящий от параметра τ , и необходимо построить решения типа (6.3).

Метод пространства малого времени основывается на отображении Π , дающем связь времен:

$$\tau = 1 - e^{-qt}, \quad q > 0. \quad (6.4)$$

Это отображение выбрано из условия наилучшей сходимости алгоритмов и более простой схемы решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Функция $F(\tau)$ для (6.4) имеет вид

$$F(\tau) = (1 - \tau)q.$$

Значения параметра q определяют в конкретных задачах исходя из условия наилучшей сходимости решения вида (6.3).

§ 6.2. Задача Коши в пространстве малого времени

Перейдем к рассмотрению случая $\Omega \subseteq R$, для которого уравнения типа (6.1) будут обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В пространстве с физическим временем задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\dot{x} = F(x, t), \quad t \in I, \quad x = x_0|_{t=0}, \quad \{x, x\} \in E(R), \quad (6.5)$$

где $F(x, t)$ — отображение множества $E_1 \times I$ в E ($E_1 \subset E$). В пространстве малого времени задача (6.5) будет

$$\frac{dx}{d\tau} = F_1(x, \tau), \quad \tau \in I_1, \quad \left\{ \frac{dx}{d\tau}, x \right\} \in E(R), \quad x = x_0|_{\tau=0},$$

где

$$F_1(x, \tau) = F(x, t) \frac{dt}{d\tau}.$$

Теперь мы можем ввести пространство E_τ с базисом

$$\{1, \tau, \tau^2, \tau^3, \dots, \tau^n\}.$$

В пространстве E_τ каждый элемент $y \in E_\tau$ можно представить так:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \tau^i. \quad (6.6)$$

Л е м м а. Если отображение $F_1(x, \tau)$ множества $E_1 \times I_1$ в E удовлетворяет условию Липшица, то множество $F_1 \cap F_{1\tau}$ ($F_{1\tau} \subset F_\tau$) — непустое.

Если отображение $F_1(x, \tau)$ удовлетворяет условию Липшица, то по теореме существования и единственности для уравнения (6.5) существует решение $x(\tau)$, удовлетворяющее начальным данным $x = x_0|_{\tau=0}$ на интервале $\tau \in [0 \div 1)$.

По теореме Вейерштрасса [6] функцию $x(\tau) \in E_1$ можно записать в виде (6.6), а следовательно, $F_1 \cap F_{1\tau}$ — непустое множество.

Если ввести вместе с пространством E , пространство $E_a (a_n \in E_a)$, то задача построения оператора L будет эквивалентна задаче построения операторов L_n с областями значений и определения в пространстве E_a $a_n = L_n a_0$, $\{a_0, a_n\} \in E_a$.

Наиболее простой способ нахождения числовых последовательностей a_n основан на представлении $F_1(x, \tau)$ в виде

$$F_1(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \tau^n, \quad D_n \in E_a.$$

Если $F_1(x, \tau) \in C^\infty[E \times I]$, то D_n осуществляет отображение $a_m (m \leq n)$ в E_a , и тогда a_n будет определяться соотношением

$$a_n = D_{n-1}/n. \quad (6.7)$$

Вопрос о сходимости решения задачи Коши для линейного уравнения в пространстве E_a решает следующая теорема.

Теорема 1. В пространстве малого времени задача Коши

$$\frac{dx}{d\tau} (1 - \tau) = \frac{1}{q} A(\tau) x, \quad \tau \in I_1, \quad (6.8)$$

$$\left\{ \frac{dx}{d\tau}; x \right\} \in E, \quad x = a_0 |_{\tau=0}$$

1) имеет решение в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n, \quad a_n \in E_a, \quad \tau \in I_1, \quad (6.9)$$

если $A(\tau) \in C^\infty(I_1)$;

2) коэффициенты a_n определяются из рекуррентных соотношений

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1} + \frac{1}{nq} \sum_{k=0}^N A_k a_{n-1-k}, \quad (6.10)$$

если $A(\tau)$ представляется в виде полинома

$$A(\tau) = \sum_{k=0}^N A_k \tau^k. \quad (6.11)$$

Доказательство. Для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} (1 - \tau) = \frac{1}{q} A x \quad (6.12)$$

формула (6.10) имеет вид

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1} + \frac{1}{nq} A a_{n-1}. \quad (6.13)$$

Пусть, начиная с некоторого номера m , a_n можно записать в виде $\|a_n\| = F_n(n) \|a_{n-1}\|$, тогда для $F_n(n)$ имеем

$$F_n(n) \leq 1 + \frac{c}{n}, \quad c = \frac{A}{q} - 1, \quad (6.14)$$

откуда следует, что $F_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и ряд (6.9) имеет радиус сходимости, равный 1.

Рассматривая номер $m > N$, получаем оценки типа (6.14) и для уравнения (6.8). Если $F(x, \tau) \in C^\infty(E \times I_1)$, то можно записать разложение

$$F(x, \tau) = F_0 + \tau F_1 + \tau^2 F_2 + \tau^3 F_3 + \dots + O(\tau^n). \quad (6.15)$$

Рекуррентная формула для исходной задачи будет иметь вид

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1} + \frac{1}{nq} F_{n-1}. \quad (6.16)$$

Если $\|F_{n-1}\| \leq M \|a_{n-1}\| n^\alpha$, $\alpha < 1$, то эта формула определяет последовательность Коши для интервала $I_1 \equiv [0, 1)$. Это доказывается так же, как в приведенной выше теореме.

Пусть, начиная с некоторого номера m , $\|a_n\| = \|a_{n-1}\| \tilde{F}_n$, тогда

$$\tilde{F}_n \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{M}{qn^{1-\alpha}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

В работе [103] разработан алгоритм численного решения задачи (6.8) по рекуррентной формуле (6.10).

Рассмотрим теперь построение оператора Коши для уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} (1 - \tau) = \frac{A(\tau)}{q} x + \frac{V(\tau)}{q}, \quad (6.17)$$

$$\tau \in I_1; \quad \left\{ \frac{dx}{d\tau}, x, V \right\} \in E.$$

Для функции $u = x(1 - \tau)$ это уравнение будет иметь вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{q} \left[A(\tau) - \frac{1}{(1 - \tau)} \right] u + \frac{V(\tau)}{q}. \quad (6.18)$$

Решение задачи Коши для (6.18)

$$u = W(\tau, 0) a_0 + \frac{1}{q} \int_0^\tau W(\tau, \tau_1) V(\tau_1) d\tau_1,$$

а для (6.17)

$$x = \frac{W(\tau, 0) a_0}{1 - \tau} + \frac{1}{q} \int_0^\tau \frac{W(\tau, \tau_1) V(\tau_1)}{1 - \tau} d\tau_1.$$

Для уравнения (6.17) в пространстве физического времени решение запишем так:

$$x = W_1(t, t_0) a_0 + \int_0^t W_1(\tau, s) V(s) ds$$

или

$$x = W_1(\tau, 0) a_0 + \int_0^\tau \frac{W_1(\tau, \tau_1) V(\tau_1)}{1 - \tau_1} d\tau_1.$$

Сравнивая два выражения для x , получаем представление

$$W_1(\tau, \tau_0) = \frac{1}{q} \frac{W(\tau, \tau_0)(1 - \tau_0)}{1 - \tau}.$$

Из свойства

$$\frac{dx}{d\tau} (1 - \tau) = \frac{du}{d\tau} + \frac{u}{1 - \tau}, \quad u = x(1 - \tau)$$

для функции $u_k = x(1 - \tau)^k$ в случае однородного уравнения имеем

$$\frac{du_k}{d\tau} (1 - \tau) = \frac{1}{q} [A(\tau) - ki] u_k, \quad (6.19)$$

где i — единичная матрица.

Теперь можно сформулировать задачу Коши для уравнения (6.9) и построить решения в виде рядов (6.6).

Рассмотрение задач для функции u_k полезно при практической реализации алгоритмов, поскольку алгоритмы для u_k обладают преимуществами в смысле сходимости. Приведем простейший пример

$$\dot{x} = -bx, \quad b > 0.$$

Постоянную q возьмем равной b , тогда рекуррентная формула будет иметь вид

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right) a_{n-1}.$$

Отсюда следует $a_1 = -a_0$, $a_k = 0$, $k > 1$, и получаем решение $x = -a_0 e^{-bt}$.

Теперь возьмем уравнение

$$\dot{x} = bx.$$

Рекуррентная формула будет иметь вид $a_n = a_{n-1}$, а для функции $u_1 = x(1 - \tau)$ имеем

$$a'_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a'_{n-1}, \quad a'_k = 0, \quad k > 0.$$

Тогда $x = a_0 / (1 - \tau) = e^{bt}$, и получается снова точное решение.

Заметим, что для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, ситуация с точки зрения качественной теории метода оказалась более благоприятной (по сравнению с задачами теории потенциала ускорения, математической физики и т. д.), и в настоящее время существует ряд теорем, доказывающих сходимость алгоритмов на всем временном интервале с различными отображениями.

А. Пуанкаре [89], переходя от системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (6.20)$$

к системе

$$\frac{dx}{ds} = Y(x)$$

и полагая

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 1 + \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

доказал, что решение уравнения (6.20) можно записать в виде ряда по степеням параметра

$$\tau = (e^{as} - 1) / (e^{as} + 1)$$

и эти ряды будут сходящимися для всех действительных значений $\{s, t\}$, если функции

$$Y_j(x) = \frac{X_j(x)}{1 + \sum_{i=1}^n X_i^2(x)}$$

голоморфны при всех действительных значениях переменных.

Отличием метода А. Пуанкаре от современного формализма метода функциональных параметров является то, что в методе Пуанкаре вводится дополнительное отображение $t \rightarrow s$, зависящее от состояния системы.

Для системы двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \quad (6.21)$$

В. И. Зубовым доказаны две теоремы [30].

Теорема 2. Общее решение в ограниченной области асимптотической устойчивости А системы (6.21), целиком погруженной вместе с границей в область G (голоморфных правых частей), может быть представлено в виде рядов

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tau^n, \quad y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tau^n,$$

где

$$\tau = th qt,$$

сходящихся при $-\infty < t < +\infty$.

Теорема 3. Если у системы (6.21) невозмущенное движение $\{x=0, y=0\}$ имеет область асимптотической устойчивости A и правые части (6.21) голоморфны в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in A$, то любое решение системы, проходящее в момент $t=0$ через точку (x_0, y_0) , представляется в виде рядов

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tau^n, \quad y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tau^n,$$

где

$$\tau = (\operatorname{sh} qt - 1) / (\operatorname{sh} qt + 1).$$

А. А. Мартынюк [42, 43], основываясь на работах А. Пуанкаре и В. И. Зубова, изучил вопрос о возможности построения решения задачи Коши в виде ряда по степеням параметра

$$\tau = (e^{qt} - 1) / (e^{qt} + 1)$$

и по существу построил решение задачи Коши, свободное от недостатков решения А. Пуанкаре (в смысле преобразования времени). С помощью преобразования временного интервала в малый временной интервал ряд вопросов устойчивости движения изучен в работе К. П. Персидского [87].

Сделаем замечание о методах доказательства теорем о сходимости решений в пространстве малого времени. Также начиная с работ А. Пуанкаре [89], доказательство теорем основывалось на построении комплексного параметрического пространства, отображении некоторой области этого пространства на ограниченную область (чаще внутренность круга) и использовании свойств аналитических функций (см. гл. 5).

В работах автора по методу пространства малого времени (см., например, [79]) был избран другой путь доказательства сходимости, основанный на построении рекуррентных соотношений и их анализе. Этот путь в вычислительном отношении более предпочтителен, поскольку вместе с доказательством определенных утверждений он дает и алгоритмы решения задач.

В задаче Коши для нелинейного дифференциального уравнения получена оценка, обеспечивающая существование решений, пригодных для интервала $I_1 \subseteq [0 \div 1)$, однако эта оценка априори неизвестна, а ее можно определить только при реализации численного решения на ЭВМ.

Кроме того, из теорем В. И. Зубова и А. А. Мартынюка следует, что если система асимптотически устойчива, то решение задачи Коши методом функциональных параметров существует для всех $t \in [0 \div \infty)$. Однако теоремы В. И. Зубова и А. А. Мар-

тынюка основаны на других отображениях, в связи с чем В. И. Нещеретом [60] доказаны соответствующие теоремы для отображения $\tau = 1 - e^{-qt}$.

Из сопоставления полученной оценки и результатов В. И. Нещерета следует, что оценка имеется для системы, обладающей асимптотической устойчивостью.

В обзоре [78] приведена такая теорема.

Теорема 4. Если $M \subset C(I_1)$ ($I_1 \in [0, 1)$) — компактное множество, содержащее полиномы $P(\tau) = \sum_n^N b_n \tau^n$ и $F(x, \tau) \in M$, то

задача Коши для уравнения $\dot{x} = F(x, \tau)$ имеет решение в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^k x_n \tau^n + O(\tau^{k+1}), \quad \tau = 1 - e^{-qt}$$

с радиусом сходимости $R = 1$.

Замечание. С точки зрения реализации на ЭВМ представляет интерес вопрос о вычислительной эффективности метода пространства малого времени. Суждения об этом можно сделать на основе работ [60, 103], в которых были реализованы алгоритмы метода в задаче Коши для линейной и нелинейной систем дифференциальных уравнений.

В частности, в работе [60] был проведен вычислительный эксперимент для сравнения вычислительной эффективности метода пространства малого времени и метода Рунге — Кутта.

С одинаковой точностью системы дифференциальных уравнений различной размерности N с полиномом степени $M = 5$ в правой части решались обоими методами. Время счета в минутах приведено в табл. 6.1.

Таблица 6.1

N	τ	ПК
1	2	13
3	15	25
5	32	90
10	107	213

Таблица 6.2

M	τ	ПК
1	0,5	8
2	2	17
3	15	26

Аналогично решались системы дифференциальных уравнений с различными степенями нелинейности в правой части. В качестве примеров рассматривались системы размерности $N = 3$. Время счета в минутах приведено в табл. 6.2.

Расчет проводился для $0 < t \leq 1$. При увеличении расчетного временного интервала для метода Рунге — Кутта соответствен-

но потребуется увеличение времени счета, тогда как для решения методом пространства малого времени получается решение сразу для всего временного интервала. Это существенно увеличивает вычислительную эффективность метода пространства малого времени по сравнению с другими методами.

§ 6.3. Задача Коши для уравнения в частных производных

В этой проблеме первым возникает вопрос об условиях, обеспечивающих решение в виде рядов по малому времени.

Теорема 5. *Корректно поставленная линейная задача Коши*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} (1 - \tau) &= \frac{1}{q} B \varphi, & g \in \Omega, & \{\varphi, \varphi_0\} \in E(\Omega), \\ \varphi &= \varphi|_{\tau=0}, & \tau &\in [0 \div 1) \end{aligned} \quad (6.22)$$

имеет решение в виде ряда

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \tau \varphi_1 + \tau^2 \varphi_2 + \tau^3 \varphi_3 + \dots + O(\tau^n), \\ \varphi_i &\in (\Omega), & \tau &\in [0 \div 1), \end{aligned} \quad (6.23)$$

если

$$\begin{aligned} a) & E(\Omega) \in C^\infty(\Omega); \\ б) & \varphi_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_{n-1} + \frac{1}{nq} B \varphi_{n-1}; \end{aligned} \quad (6.24)$$

в) оператор B ограничен.

Доказательство. По (6.24) имеем

$$\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_{n-1}\| \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{nq} \|B \varphi_{n-1}\|.$$

Введем норму оператора

$$\|B\| = \sup \frac{\|B \varphi\|}{\|\varphi\|}, \quad \varphi \in E.$$

Тогда

$$\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_{n-1}\| \left(1 - \frac{1 - \|B\|/q}{n}\right).$$

Если принять $q = \|B\|$, то

$$\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_{n-1}\|,$$

и получаем, что ряд (6.23) имеет радиус сходимости $R = 1$.

Доказанная теорема допускает обобщение на вариант уравнения вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} (1 - \tau) = \frac{B(\tau) \Phi}{q} + \frac{f(\tau)}{q}, \quad (6.25)$$

когда существуют полиномиальные представления:

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^K B_n \tau^n, \quad f(\tau) = \sum_{n=0}^N f_n \tau^n, \quad \{K, N\} < \infty.$$

Рекуррентная формула, определяющая функции φ_n в задаче Коши, для уравнения (6.25) будет иметь такой вид:

$$\varphi_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_{n-1} + \frac{1}{nq} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \bar{B}_p \varphi_{n-1-p} + \bar{f}_{n-1} \right),$$

где

$$\bar{B}_p = \begin{cases} B_p, & p \leq K; \\ 0, & p > K; \end{cases} \quad \bar{f}_{n-1} = \begin{cases} f_{n-1}, & (n-1) \leq N; \\ 0, & (n-1) > N. \end{cases}$$

В случае нелинейного дифференциального оператора $B\varphi$ можно предложить несколько методов вычисления ряда (6.23). Мы рассмотрим два: метод рекуррентных соотношений и метод скалярных произведений.

Предположим, что нелинейный оператор $B\varphi$ допускает представление

$$B\varphi = B_0 \varphi_0 + \tau B_1(\varphi_0, \varphi_1) + \tau^2(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) + \dots \\ \dots + \tau^n B_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) + O(\tau^n),$$

тогда для функций φ_n будет справедлива формула

$$\varphi_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_{n-1} + \frac{1}{q^n} B_{n-1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}). \quad (6.26)$$

Для сходимости ряда (6.23) на всем интервале $I_1 \subset [0, 1]$ с функциями φ_n по (6.26) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\|B_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)\| \leq \|\varphi_{n-1}\| M_n^\alpha, \quad \alpha < 1, \quad n < m.$$

Это доказывается так же, как и в § 6.1.

Метод скалярных произведений. Вводя обобщенное решение для уравнения (6.22), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} [\varphi \cdot \Phi] = [B^1(\varphi, \Phi) \cdot \varphi] + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \varphi \right]. \quad (6.27)$$

Здесь $[\varphi \cdot \Phi] = \int_{\Omega} \varphi \Phi d\Omega$ — скалярное произведение в гильбертовом

пространстве $H(\Omega)$, причем $\Phi \in C_0^\infty(\Omega) \subseteq H(\Omega)$ и оператор $B\varphi$ обладает свойством $[B\varphi \cdot \Phi] = B^1[\varphi, \Phi \cdot \varphi]$. Класс $C_0(\Omega)$ включает функ-

ции, равные нулю, вместе со своими n -производными в некоторой граничной полосе области (финитные функции). Обобщенное решение, удовлетворяющее уравнению (6.27), существует для произвольного элемента $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$, но в методе может возникнуть такая ситуация, что не всякий элемент Φ может привести к сходящимся решениям, в связи с чем введем подпространство $C_{01}^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$, элементами которого будут функции Φ , обеспечивающие сходимость решений в методе скалярных произведений.

Введем скалярное произведение

$$F_n = [\varphi \cdot \Phi_n],$$

где

$$\Phi_n = B(\varphi, \Phi_{n-1}) + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial t}, \quad \Phi \in C_{01}^\infty(\Omega),$$

тогда уравнение (6.22) будет эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} = F_{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad q=1. \quad (6.28)$$

Задача Коши для уравнения (6.28) в пространстве малого времени будет иметь вид

$$\frac{\partial F_n}{\partial \tau} (1-\tau) = F_{n+1}, \quad \tau \in I_1, \quad F_n^0 = F_n|_{\tau=0}. \quad (6.29)$$

Будем искать решение задачи (6.29)

$$F_n = F_n^0 + \tau F_n^1 + \tau^2 F_n^2 + \tau^3 F_n^3 + \dots + O(\tau^N), \quad F_n^0 = A_n.$$

Имеем рекуррентное соотношение

$$F_n^k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) F_n^{k-1} + \frac{1}{k} F_{n+1}^{k-1} \quad (6.30)$$

и соотношение

$$F_n^k = \frac{1}{kq} [F_{n+1}^0 + F_{n+1}^1 + \dots + F_{n+1}^{k-1}]. \quad (6.31)$$

Теорема 6 [73]. Последовательность $F_1^n = \sum_{p=1}^n F_1^{p-1} \tau^{p-1}$ будет последовательность Коши в пространстве $C(I_1)$, $I_1 \subseteq [0 \div 1)$, если

$$a) F_1^{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{p=1}^n a_p^n A_p, \quad \sum_{p=2}^n a_p^n = (n-1), \quad a_n^n < M_n, \quad a_p^n > 0;$$

б) счетное множество $\bar{A} (A_p \in \bar{A})$ лежит внутри некоторого шара радиуса R .

Доказательство. Составим разность

$$\Delta = F_1^n - F_1^{n-1},$$

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{p=2}^n A_p (a_p^{n+1} - a_p^n) + \frac{1}{n} a_{n+1}^{n+1} A_{n+1}.$$

Запишем Δ в виде

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{1}{n} \sum_{p=2}^n A_p (a_p^{n+1} - a_p^n), \quad \Delta_2 = \frac{1}{n} a_{n+1}^{n+1} A_{n+1}.$$

Тогда имеем $\Delta_2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, поскольку $a_{n+1}^{n+1} < M_{n+1}$, а $A_{n+1} < B$ ($B = \sup \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$), $\Delta_1 < \frac{B}{n} \sum_{p=2}^n (a_p^{n+1} - a_p^n)$. Но

$$\sum_{p=2}^n a_p^n = (n-1), \quad \sum_{p=2}^n a_p^{n+1} = n - a_{n+1}^{n+1}.$$

Тогда

$$\Delta_1 < \frac{B - M_{n+1}}{n} \text{ и } \Delta_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

По признаку Даламбера при $\Delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ последовательность F_1^n будет сходящейся на интервале I_1 .

Из (6.26), (6.31) следует, что условие а) удовлетворено, причем $a_n^n = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)} (n > 2)$, и выполнимость условия б) будет достаточной для построения сходящихся рядов для F_n . Преимущество условия б) заключается в том, что по начальным скалярным произведениям мы можем судить о сходимости алгоритмов.

Таким путем были получены формулы для F_1^k :

$$F_1^0 = A_1, \quad F_1^1 = A_2,$$

$$F_1^2 = \frac{1}{2} (A_2 - A_3),$$

$$F_1^3 = \frac{1}{3} \left[A_2 + A_3 + \frac{1}{2} (A_3 + A_4) \right],$$

$$F_1^4 = \frac{1}{4} \left\{ A_2 + A_3 + \frac{1}{2} (A_3 + A_4) + \frac{1}{3} [A_3 + A_4 + \frac{1}{2} (A_4 + A_5)] \right\},$$

$$F_1^5 = \frac{1}{5} \left\{ A_2 + A_3 + \frac{1}{2} (A_3 + A_4) + \frac{1}{3} [A_3 + A_4 + \frac{1}{2} (A_4 + A_5)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (A_3 + A_4) + \frac{1}{2} (A_4 + A_5) + \frac{1}{3} [A_4 + A_5 + \frac{1}{2} (A_5 + A_6)] \right\}.$$

Набор моментов — скалярных произведений F_n — определяет вид функции φ , и следующими являются задачи определения функции φ по ее моментам и A_n . Эти задачи могут решаться различными способами, анализировать которые мы не будем. Отметим только, что в случае дифференциального оператора $B\varphi$ удовлетворяющего условиям

$$\|B\varphi_0\| = \|B_0\varphi_0\| + \|B_1\varphi_0\|, \quad \|B_1\varphi_0\| \ll \|B_0\varphi_0\|$$

($B_0\varphi_0$ — линейный дифференциальный оператор), можно получить приближенное решение, требующее знания только первого момента F_1 и функций φ_n^0 , определяемых рекуррентным соотношением

$$\varphi_n^0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_{n-1}^0 + \frac{1}{nq} B_0 \varphi_{n-1}^0.$$

Тогда решение задачи Коши приближенно можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_0 + k_1 \varphi_1^0 \tau + k_2 \varphi_2^0 \tau^2 + k_3 \varphi_3^0 \tau^3 + \dots + O(\tau^N),$$

$$k_n = F_1^n / [\varphi_n^0 \Phi].$$

§ 6.4. Решение нелинейных функциональных уравнений ¹

В настоящем параграфе построим решение функциональных уравнений различного типа, в которых аргумент может изменяться в произвольной области. Рассматривая эту область в качестве параметрического интервала, можно применить метод функциональных параметров для представления решения в виде соответствующих разложений.

Для простоты аргументом будем считать время t . Тогда, не теряя общности, можно говорить о методе пространства малого времени, который был исследован в предыдущих параграфах применительно к дифференциальным уравнениям, как вариант метода функциональных параметров.

1. Пусть нестационарный процесс описывается уравнением

$$F(x(t), t) = 0, \tag{6.32}$$

где x — N -мерный вектор, F — оператор со значениями в банаховом пространстве E_1 .

Будем считать, что

$$F(x_0, t_0) = 0. \tag{6.33}$$

Для численного решения этого уравнения используют метод Ньютона и другие итерационные методы, а также проекционные методы Галеркина, Галеркина — Петрова и т. д. При определенных условиях возможно его аналитическое решение в виде степенного ряда

¹ Параграфы 6.4 и 6.5 написаны В. И. Нещеретом.

Доказательство. Составим разность

$$\Delta = F_1^n - F_1^{n-1},$$

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{p=2}^n A_p (a_p^{n+1} - a_p^n) + \frac{1}{n} a_{n+1}^{n+1} A_{n+1}.$$

Запишем Δ в виде

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{1}{n} \sum_{p=2}^n A_p (a_p^{n+1} - a_p^n), \quad \Delta_2 = \frac{1}{n} a_{n+1}^{n+1} A_{n+1}.$$

Тогда имеем $\Delta_2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, поскольку $a_{n+1}^{n+1} < M_{n+1}$, а $A_{n+1} < B$ ($B = \sup \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$), $\Delta_1 < \frac{B}{n} \sum_{p=2}^n (a_p^{n+1} - a_p^n)$. Но

$$\sum_{p=2}^n a_p^n = (n-1), \quad \sum_{p=2}^n a_p^{n+1} = n - a_{n+1}^{n+1}.$$

Тогда

$$\Delta_1 < \frac{B - M_{n+1}}{n} \text{ и } \Delta_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

По признаку Даламбера при $\Delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ последовательность F_1^n будет сходящейся на интервале I_1 .

Из (6.26), (6.31) следует, что условие а) удовлетворено, причем $a_n^n = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)} (n > 2)$, и выполнимость условия б) будет достаточной для построения сходящихся рядов для F_n . Преимущество условия б) заключается в том, что по начальным скалярным произведениям мы можем судить о сходимости алгоритмов.

Таким путем были получены формулы для F_1^k :

$$F_1^0 = A_1, \quad F_1^1 = A_2,$$

$$F_1^2 = \frac{1}{2} (A_2 + A_3),$$

$$F_1^3 = \frac{1}{3} \left[A_2 + A_3 + \frac{1}{2} (A_3 + A_4) \right],$$

$$F_1^4 = \frac{1}{4} \left\{ A_2 + A_3 + \frac{1}{2} (A_3 + A_4) + \frac{1}{3} [A_3 + A_4 + \frac{1}{2} (A_4 + A_5)] \right\},$$

$$F_1^5 = \frac{1}{5} \left\{ A_2 + A_3 + \frac{1}{2} (A_3 + A_4) + \frac{1}{3} [A_3 + A_4 + \frac{1}{2} (A_4 + A_5)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (A_3 + A_4) + \frac{1}{2} (A_4 + A_5) + \frac{1}{3} [A_4 + A_5 + \frac{1}{2} (A_5 + A_6)] \right\}.$$

Набор моментов — скалярных произведений F_n — определяет вид функции φ , и следующими являются задачи определения функции φ по ее моментам и A_n . Эти задачи могут решаться различными способами, анализировать которые мы не будем. Отметим только, что в случае дифференциального оператора $B\varphi$, удовлетворяющего условиям

$$\|B\varphi_0\| = \|B_0\varphi_0\| + \|B_1\varphi_0\|, \quad \|B_1\varphi_0\| \ll \|B_0\varphi_0\|$$

($B_0\varphi_0$ — линейный дифференциальный оператор), можно получить приближенное решение, требующее знания только первого момента F_1 и функций φ_n^0 , определяемых рекуррентным соотношением

$$\varphi_n^0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_{n-1}^0 + \frac{1}{nq} B_0 \varphi_{n-1}^0.$$

Тогда решение задачи Коши приближенно можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_0 + k_1 \varphi_1^0 \tau + k_2 \varphi_2^0 \tau^2 + k_3 \varphi_3^0 \tau^3 + \dots + O(\tau^N),$$

$$k_n = F_n^n / [\varphi_n^0 \Phi].$$

§ 6.4. Решение нелинейных функциональных уравнений¹

В настоящем параграфе построим решение функциональных уравнений различного типа, в которых аргумент может изменяться в произвольной области. Рассматривая эту область в качестве параметрического интервала, можно применить метод функциональных параметров для представления решения в виде соответствующих разложений.

Для простоты аргументом будем считать время t . Тогда, не теряя общности, можно говорить о методе пространства малого времени, который был исследован в предыдущих параграфах применительно к дифференциальным уравнениям, как вариант метода функциональных параметров.

1. Пусть нестационарный процесс описывается уравнением

$$F(x(t), t) = 0, \tag{6.32}$$

где x — N -мерный вектор, F — оператор со значениями в банаховом пространстве E_1 .

Будем считать, что

$$F(x_0, t_0) = 0. \tag{6.33}$$

Для численного решения этого уравнения используют метод Ньютона и другие итерационные методы, а также проекционные методы Галеркина, Галеркина — Петрова и т. д. При определенных условиях возможно его аналитическое решение в виде сте-

¹ Параграфы 6.4 и 6.5 написаны В. И. Нещеретом.

пенного ряда в малой окрестности начальной точки. Метод функциональных параметров позволяет получить аналитическое решение уравнения (6.32) при произвольных значениях аргумента.

Теорема 7. Пусть

- а) оператор аналитичен в области G ;
 б) существует действующий из E_1 в E_2 непрерывный линейный оператор

$$\Gamma = [F'_x(x, t)]^{-1}; \quad (6.34)$$

в) решение $x(t)$ уравнения (6.32) остается в ограниченной области G_1 , погруженной с границей в область G .

Тогда решение уравнения

$$x = \sum_{n=0} x_n \tau^n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (6.35)$$

сходится в области G_1 и формула (6.35) определяет единственную неявную функцию.

Доказательство. Существование, единственность и аналитичность решения гарантируются выполнением условий а), б).

На основании теоремы о представлении решения уравнения (6.32) в малой окрестности точки x_0 в виде сходящихся рядов по степеням $(t-t_0) < h$ нетрудно показать справедливость для функциональных уравнений следующего утверждения, аналогичного известной теореме В. И. Зубова [30] в теории дифференциальных уравнений. Если решение $x = x(t, x_0)$ уравнения (6.32) остается в ограниченной области G_1 , погруженной вместе с границей в область G аналитичности оператора F , то оно регулярно в полосе $2h$, содержащейся внутри G_1 .

Запишем уравнение (6.32) в пространстве комплексного малого времени

$$F^*(x(\tau), \tau) = 0.$$

Для этого воспользуемся выражением

$$\tau = -\exp[-q(t-t_0)], \quad (6.36)$$

где

$$t-t_0 = t_1 + i \frac{t_2 \pi}{2h}, \quad |t_2| \leq h,$$

которое отображает часть полосы $2h$ вида

$$t_1 = -\frac{2h}{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{\pi}{2h} t_2 \right), \quad (6.37)$$

содержащую вещественную ось, на круг $|\tau| < 1$, сохраняя соответствие точки $\tau=0$ точке t_0 . Так как решение регулярно в части круга $|\tau| < |\tau_*|$, соответствующей G_1 , то, ограничиваясь действительной частью выражения (6.36), получаем, что ряд (6.35) сходится при всех t из области G_1 , что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. В общем случае, когда не выполняется условие б), решения, как правило, разветвляются и не являются аналитическими. Тогда решение уравнения (6.32) можно найти в виде (6.35), где показатели, быть может, не целые числа.

Простым примером может служить уравнение

$$x^2 - t = 0. \quad (6.38)$$

Здесь $F'_x(0, 0) = 0$. Очевидное решение $x = \pm t^{1/2}$. В малом времени ему соответствует ряд

$$x = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \tau^{1/2} + \frac{1}{4\sqrt{q}} \tau^{3/2} + \frac{13}{96\sqrt{q}} \tau^{5/2} - \frac{3}{2\sqrt{q}} \tau^{7/2} + \dots \right),$$

где коэффициенты определяются рекуррентной формулой

$$x_n = \frac{1}{2x_1} \left[\frac{2}{q(n+1)} - \sum_{p=3}^{n-2} x_p x_{n+1-p} \right],$$

n, p — нечетные.

Для конкретных типов уравнений можно указать условия, при которых гарантируются ограниченность решения и выполнение приведенной теоремы, подобно тому как это имеет место в асимптотически-устойчивых процессах, описываемых обыкновенными дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями [60].

Мы ограничимся далее иллюстрацией процедуры получения рекуррентных соотношений для решения некоторых наиболее характерных уравнений. Отметим, что решения примеров носят преимущественно методический характер и, как правило, могут быть записаны в форме более рациональной в смысле вычислительной эффективности.

2. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^{i_1} \dots \sum_{j_{m-1}=1}^{i_{m-1}} A_{j_1 j_2 \dots j_m}^l(t) x^{j_1} x^{j_2} \dots x^{j_m} + f^l(t) = 0, \quad (6.39)$$

$$l = 1, 2, \dots, N.$$

Подставим сюда искомое решение и зависящие от времени коэффициенты в виде разложений

$$x^{j_m} = \sum_{n=0} x_n^{j_m} \tau^n, \quad x_0 \neq 0;$$

$$A_{j_1 j_2 \dots j_m}^l = \sum_{n=0} A_{j_1 \dots j_m}^{l n} \tau^n, \quad f^l = \sum_{n=0} f_n^l \tau^n.$$

Тогда

$$F(x, \tau) = \sum_{n=0} F_n \tau^n = \sum_{n=0} \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{i_{m-1}} \sum_{i_1=0}^n \dots \\ \dots \sum_{i_{m-1}=0}^{i_{m-1}} A_{j_1 \dots j_m}^{i_m} x_{n-i_1}^{j_1} x_{i_1-i_2}^{j_2} \dots x_{i_{m-1}-i_m}^{j_m} \tau^n + \sum_{n=0} f_n^i \tau^n = 0.$$

Выделим в F_n члены, содержащие x_n :

$$- \sum_{m=1}^M \sum_{j_1=1}^N \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{i_{m-1}} A_{j_1 \dots j_m}^{i_m} (x_n^{j_1} x_0^{j_2} \dots x_0^{j_m} + x_0^{j_1} x_n^{j_2} x_0^{j_3} \dots x_0^{j_m} + \dots \\ \dots + x_0^{j_1} \dots x_0^{j_{m-1}} x_n^{j_m}) = \sum_{m=1}^M \sum_{j_1=1}^N \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{i_{m-1}} \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \\ \dots \sum_{i_{m-1}=0}^{i_{m-1}} A_{j_1 \dots j_m}^{i_m} x_{n-i_1}^{j_1} \dots x_{i_{m-1}}^{j_m} + f_n^i.$$

В правой части равенств должно выполняться ограничение на индексы: если $i_\alpha = n$, то $i_{\alpha+1}$ начинается с 1, а i_m не принимает значения m .

Обозначим правую часть равенства через φ^l . Задача в итоге преобразуется к виду

$$\sum_{p=1}^N B_p^l x_n^p = \varphi^l(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n-1}^k; f_1^k, \dots, f_n^k), \quad (6.40) \\ l=1, 2, \dots, N, \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Получается система из N линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x_n^p , которую нужно решать или в общем виде методом исключений, или на каждом n любым численным способом. Если матрица B невырожденная, то $x_n = B^{-1} \varphi$. Конкретный пример такого типа будет приведен в конце параграфа.

3. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F[x(\sigma), \sigma] d\sigma. \quad (6.41)$$

В малом времени

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau F^* [x(\tau_\sigma), \tau_\sigma] \frac{d\tau_\sigma}{q(1-\tau_\sigma)},$$

где $\tau_\sigma = 1 - e^{-q\sigma}$.

Если функция $F^*(x, \tau_\sigma)$ может быть представлена в виде

$$F^*(x, \tau_\sigma) = \sum_{n=0} F_n \tau_\sigma^n \quad (6.42)$$

(см. § 6.5), то

$$x(\tau) = x_0 + \frac{1}{q} \int_0^\tau \sum_{n=0} \sum_{p=0}^n F_{n-p} \tau_\sigma^p d\tau_\sigma.$$

Подынтегральное выражение сходится равномерно внутри промежутка сходимости ряда (6.42), следовательно, его можно почленно интегрировать. В результате получаем рекуррентную формулу, которая определит решение исходного уравнения:

$$x_n = \frac{1}{nq} \sum_{p=0}^{n-1} F_p [x_0, \dots, x_p]. \quad (6.43)$$

Учитывая, что (6.41) эквивалентно задаче Коши для дифференциального уравнения, формулу (6.43) можно рассматривать так же, как иную форму решения нелинейной задачи Коши, аналогичную выражению (6.16).

4. Нелинейные уравнения Вольтерра более общего вида

$$x(t) = \int_0^t K[t, \sigma, x(\sigma)] d\sigma + \lambda(t), \quad (6.44)$$

или

$$x(\tau) = \int_0^\tau K^*[\tau, \tau_\sigma, x(\tau_\sigma)] \frac{d\tau_\sigma}{q(1-\tau_\sigma)} + \lambda^*(\tau)$$

можно с учетом (6.35) привести к одной из двух вырожденных форм.

а) Если ядро уравнения (6.44) вырождается, то в малом времени

$$x(\tau) = \frac{1}{q} \int_0^\tau \sum_{n=0} \varphi_n^1 \tau^n \sum_{p=0} \varphi_p^2 \tau_\sigma^p \sum_{k=0} \tau_\sigma^k d\tau_\sigma + \lambda^*(\tau). \quad (6.45)$$

Решение (6.45) в виде ряда (6.35) определится коэффициентами:

$$x_0 = \lambda_0, \quad \dots \dots \dots \quad (6.46)$$

$$x_n = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_k^1}{n-k} \sum_{s=0}^{n-1-k} \varphi_s^2 [x_0, \dots, x_s] + \lambda_n, \quad n \geq 1$$

Пример:

$$x(t) = \int_0^t [c_0 + c_1 f^1(t) + c_2 f^2(x(\sigma), \sigma) + c_3 f^3(t) f^4(x(\sigma), \sigma)]^{-1} d\sigma. \quad (6.50)$$

Если это уравнение представить в виде

$$x(\tau) = \int_0^\tau \left[\left(c_0 + c_1 \sum_{n=0}^k f_n^1 \tau^n + c_2 \sum_{p=0}^s f_p^2 \tau^p + \right. \right. \\ \left. \left. + c_3 \sum_{n=0}^k f_n^3 \tau^n \sum_{p=0}^s f_p^4 \tau^p \right) q(1-\tau\sigma) \right]^{-1} d\tau\sigma,$$

то для (6.49) получаем рекуррентные соотношения:

$$\varphi_{ks} = -\varphi_{00} \left(c_1 \sum_{n=1}^k \varphi_{k-n,s} f_n^1 + c_2 \sum_{p=1}^s \varphi_{k,s-p} f_p^2 + \right. \\ \left. + c_3 \sum_{n=0}^k \sum_{p=0}^s \varphi_{k-n,s-p} f_n^3 f_p^4 \right), \\ \varphi_{00} = (c_0 + c_1 f_0^1 + c_2 f_0^2 + c_3 f_0^3 f_0^4)^{-1}.$$

В скобках в последнем слагаемом при такой записи не должно быть $n=p=0$ одновременно.

5. Рассмотрим уравнение Урысона

$$x(t) = \int_0^T K[t, \sigma, x(\sigma)] d\sigma + \lambda(t), \quad (6.51)$$

$$x(\tau) = \int_0^{\tau T} K^*[\tau, \tau\sigma, x(\tau\sigma)] \frac{d\tau\sigma}{q(1-\tau\sigma)} + \lambda^*(\tau), \quad \tau T = 1 - e^{-qT}.$$

Решение этого уравнения можно также искать в виде простого разложения (6.35). Записав подынтегральное выражение в форме а) или б) и проинтегрировав его, получим следующие системы алгебраических уравнений (вообще говоря, нелинейных) относительно неизвестных коэффициентов:

$$а) \quad x_n = \frac{\varphi_n^1}{q} \sum_{k=1}^L \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{k} \varphi_p^2 [x_0, \dots, x_p] \tau_T^k + \lambda_n,$$

$$б) \quad x_n = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^L \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{k} \varphi_{np}^2 [x_0, \dots, x_n; x_0, \dots, x_p] \tau_T^k + \lambda_n,$$

$$n = 1, 2, \dots, L.$$

Большой интерес представляет форма б), рассмотрим ее подробнее:

$$\varphi_{nk} [x_0, \dots, x_k] = \sum_{s=0}^k \varphi_{nks} [x_{00}, \dots, x_{ks}] \tau_T^s,$$

$$x(\tau, \tau_T) = \frac{1}{q} \int_0^{\tau_T} \sum_{n=0}^{\tau_T} \sum_{k=0}^{\tau_T} \sum_{s=0}^{\tau_T} \varphi_{nks} \tau^n \tau_\sigma^k \tau_T^s \sum_{r=0}^{\tau_T} \tau_\sigma^r d\tau_\sigma + \lambda^*(\tau). \quad (6.55)$$

Для коэффициентов искомого решения получаем формулы, аналогичные (6.54):

$$x_{n0} = \lambda_n,$$

.....

$$x_{np} = \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{1}{p-s} \sum_{k=0}^{p-1-s} \varphi_{nks}, \quad p \geq 1. \quad (6.56)$$

Пример:

$$x(t) = \int_0^T [c_0 + c_1 f^1(t) + c_2 f^2(\sigma) + c_3 f^3(t) f^4(\sigma)]^{-1} d\sigma + \lambda(t).$$

Решение определится (6.56), где

$$\varphi_{000} = (c_0 + c_1 f_0^1 + c_2 f_{00}^2 + c_3 f_{0/00}^3 f_{00}^4)^{-1},$$

$$\varphi_{nks} = -\varphi_{000} \left(c_1 \sum_{l=1}^n \varphi_{n-l, k, s} f_l^1 + c_2 \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^s \varphi_{n, k-r, s-m} f_{rm}^2 + \right. \\ \left. + c_3 \sum_{l=0}^n \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^s \varphi_{n-l, k-r, s-m} f_l^3 f_{rm}^4 \right).$$

В выражении в скобках при такой записи должно соблюдаться ограничение на индексы: во втором члене не должно быть $r=m=0$, в третьем — $l=r=m=0$ одновременно.

Пусть

$$f(\sigma) = f[x(\sigma)] = \sum_{m=1}^M A_m x^m.$$

Тогда

$$f_{rm} = \sum_{m=1}^M \sum_{i_1=0}^r \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \sum_{i_{m-2}=0}^{i_{m-3}} \sum_{i_{m-1}=0}^m \sum_{i_{m-2}=0}^{m-i_{m-1}} \sum_{i_{m-3}=0}^{m-i_{m-2}-i_{m-1}} \dots \\ \dots \sum_{j_s=0}^{m-j_s-\dots-j_{m-1}} \sum_{j_{s-1}=0}^{m-j_{s-1}-\dots-j_{m-1}} x_{r-i_1, m-j_1-j_2-\dots-j_{m-1}} x_{i_1-i_2, i_1} \dots x_{i_{m-1}, i_{m-1}}.$$

Таким образом, решение уравнений (6.44) и (6.51) сводится в основном к нахождению коэффициентов φ_n^1 и φ_p^2 или φ_{np} для (6.44), φ_{ns}^1 и φ_{ps}^2 или φ_{nps} — для (6.51) в соответствии с конкретным видом подынтегрального выражения.

6. Теперь на основе решений интегральных и дифференциальных уравнений легко записать рекуррентные формулы для решения соответствующих интегродифференциальных уравнений. Ограничимся рассмотрением формы б), от нее легко перейти к форме а) для уравнений с вырожденным ядром.

Решение уравнения

$$\dot{x} = F^1(x, t) + \int_0^t F^2(x, \sigma, t) d\sigma, \quad (6.57)$$

или в малом времени

$$\frac{dx}{d\tau} (1-\tau) q = F^{1*}(x, \tau) + \frac{1}{q} \int_0^\tau F^{2*}(x, \tau_\sigma, \tau) \frac{d\tau_\sigma}{1-\tau_\sigma},$$

следует искать в виде простых разложений (6.35). Для коэффициентов x_n справедлива рекуррентная формула

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{nq} F_{n-1} + \frac{1}{nq} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n-k-1} \sum_{s=0}^{n-k-2} \varphi_{ks}, \quad (6.58)$$

где φ_{ks} — коэффициенты разложения подынтегрального выражения по параметрам $\{\tau, \tau_\sigma\}$ аналогично (6.48).

В интегродифференциальных уравнениях с постоянным верхним пределом

$$\dot{x} = F^1(x, t) + \int_0^T F^2(x, \sigma, t) d\sigma \quad (6.59)$$

искомое решение нужно представить двойным разложением (6.52). Для коэффициентов x_{np} этого разложения получим формулу

$$x_{np} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1,p} + \frac{1}{nq} F_{n-1,p}^1 + \frac{1}{nq^2} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{1}{p-s} \sum_{k=0}^{p-s-1} \varphi_{n-1,k,s}. \quad (6.60)$$

Здесь F_{np}^1 — коэффициенты разложения функции $F^{*1}(x, \tau)$.

Подведем некоторые итоги решения интегральных уравнений. Для наглядности обозначим через Ψ_{n-2}^1 сумму в (6.58), через $\Psi_{n-1, p-1}^2$ — сумму (6.60). Теперь рекуррентная формула (6.49) для решения уравнения Вольтерра (6.44) может быть записана в виде

$$x_n = \frac{1}{q} \Psi_{n-1}^1 [x_0, \dots, x_{n-1}] + \lambda_n, \quad (6.61)$$

а формула (6.58) для соответствующего интегродифференциального уравнения (6.57)

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1} + \frac{1}{nq}F_{n-1} + \frac{1}{nq^2}\Psi_{n-2}^1[x_0, \dots, x_{n-2}]. \quad (6.62)$$

Формулу (6.56) для решения уравнения (6.51) с постоянным верхним пределом запишем в виде

$$x_{np} = \frac{1}{q}\Psi_{n,p-1}^2[x_0, \dots, x_{p-1}], \quad (6.63)$$

а формулу (6.60)

$$x_{np} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1,p} + \frac{1}{nq}F_{n-1,p}^1 + \frac{1}{nq^2}\Psi_{n-1,p-1}^2[x_{00}, \dots, x_{p-1,p-1}]. \quad (6.64)$$

Все полученные результаты справедливы для систем уравнений, поэтому для простоты дальнейшего изложения будем считать, что последние формулы определяют вектор-коэффициенты x_n и x_{np} простого и двойного разложений вектора x решения исходной N -мерной системы через некоторую N -мерную функцию Ψ .

7. Рассмотрим решение краевой задачи для интегродифференциальных уравнений.

Если в системе уравнений для одной группы компонент вектора x заданы значения на левом конце промежутка $[0, T]$ (обозначим их просто $x(0) = x_0$), а для другой — на правом (обозначим эти компоненты через y , $y(T) = y_T$), то решение такой краевой задачи следует искать в виде двойных разложений типа (6.52) для x и y независимо от того, имеют ли интегродифференциальные уравнения переменный (6.57) или постоянный (6.59) верхний предел. Поэтому во втором случае рекуррентная формула для коэффициентов x_{np} , y_{np} будет по-прежнему иметь вид (6.60) или (6.64), а для уравнений с переменным верхним пределом

$$x_{np} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1,p} + \frac{1}{nq}F_{n-1,p}^1 + \frac{1}{nq^2}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{1}{n-1-s}\sum_{k=0}^{n-2-s}\Psi_{skp}. \quad (6.65)$$

Здесь сумму обозначим $\chi_{n-2,p}$.

Таким образом, если для системы интегродифференциальных уравнений сформулирована двухточечная краевая задача, то ее решения x , y представляются двухпараметрическими разложениями типа (6.52), где коэффициенты вычисляются по формулам (6.65), (6.60) соответственно для уравнений (6.57) и (6.58). Если в системе одновременно содержатся интегралы с переменными и постоянными верхними пределами, то и рекуррентные формулы также будут иметь функции χ_{ij} и Ψ_{ij}^2 одновременно.

Кроме рекуррентных соотношений, необходимо иметь выражения для x_{0n} и y_{0n} . Из (6.52) нетрудно видеть, что для первой группы компонент вектора x при $\tau=0$ имеем $x_0 = x_{00} + \sum_{p=1} x_{0p} \tau_T^p$, следовательно,

$$x_0 = x_{00}, \quad x_{0p} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (6.66)$$

так как x_0 не зависит от T .

Для второй группы компонент вектора x , которые мы обозначили через y , из разложения $y = \sum_{n=0} \sum_{p=0} y_{np} \tau^n \tau_T^p$ при $\tau = \tau_T$ получаем

$$y_T = y_{00} + \sum_{p=1} y_{0p} \tau_T^p + \sum_{n=1} y_{n0} \tau_T^n + \sum_{n=1} \sum_{p=1}^{n-1} y_{n-p,p} \tau_T^n,$$

откуда при любом T следует

$$y_{00} = y_T, \quad y_{0n} = - \sum_{p=0}^{n-1} y_{n-p,p}. \quad (6.67)$$

Формулы связи (6.66), (6.67) не зависят от вида отображения $\tau = Pt$ в отличие от рекуррентных формул. Не зависят они также от вида уравнений, поэтому с точностью до обозначений совпадают с аналогичными формулами, полученными несколько иным путем в работе [40] для обыкновенных дифференциальных уравнений. Следовательно, с учетом указанных формул связи любое из приведенных выше рекуррентных соотношений, если положить в нем функции Ψ_{ij} и χ_{ij} равными нулю, определяет решение краевой задачи для дифференциальных уравнений. Поэтому метод функциональных параметров позволяет решать краевые задачи для систем, содержащих одновременно дифференциальные и интегродифференциальные уравнения. Система может быть усложнена также наличием уравнений иного типа — интегральных, функциональных, для которых записываются свои рекуррентные формулы для коэффициентов двойных разложений.

З а м е ч а н и я: 1. Для нелинейных интегродифференциальных уравнений легко указать условие, при котором всегда можно гарантировать ограниченность решения. Подобно дифференциальным уравнениям, они будут иметь ограниченное решение, если описывают асимптотически устойчивый процесс. В этом случае будет выполнено основное условие приведенной выше теоремы о сходимости асимптотических решений. Очевидно, что это довольно жесткое достаточное условие может и не выполняться. Так, в краевой задаче с конечными граничными условиями решения будут ограниченными.

2. Если интеграл в уравнениях содержит постоянный нижний предел, не равный нулю, например t_0 , то функциональные параметры следует взять в виде:

$$\tau = 1 - \exp[-q(t - t_0)], \quad \tau_T = 1 - \exp[-q(T - t_0)].$$

Тогда в малом времени нижний предел будет равен нулю, и все выкладки остаются в силе. По существу мы произвели необходимую замену переменных.

8. Очень часто процесс описывается системой уравнений различного типа. Рассмотрим этот важный случай на примере дифференциальных и алгебраических (функциональных) уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F^1(x, y, t), & F^2(x, y, t) &= 0, \\ x &= x_0|_{t=0}, & F^2(x_0, y_0, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.68)$$

где x — вектор $(N_1 \times 1)$, y — вектор $(N_2 \times 1)$.

Найдем решение в виде:

$$x = \sum_{n=0} x_n \tau^n, \quad y = \sum_{n=0} y_n \tau^n.$$

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения определится формулой типа (6.43) или (6.16)

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{nq} F_{n-1}^1[x_0, \dots, x_{n-1}; y_0, \dots, y_{n-1}]. \quad (6.69)$$

Из второго уравнения так же, как для (6.39), получаются соотношения для y_n :

$$y_n = \Phi[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n; y_0, \dots, y_{n-1}].$$

Поочередное применение этих формул позволяет решить поставленную задачу.

Пример:

$$\dot{x} = F(x, y^1, y^2), \quad x = x_0|_{t=0};$$

$$a_1 y^1 y^2 + a_2 y^1 x = 0;$$

$$a_3 x + a_4 (y^1)^2 + a_5 y^2 (x)^2.$$

Рассмотрим алгебраические уравнения:

$$a_1 (y_n^1 y_0^2 + y_0^1 y_n^2) + a_2 y_n^1 x_0 = -a_1 \sum_{i=1}^{n-1} y_{n-i}^1 y_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{n-1}^1 x_i,$$

$$2a_4 y_0^1 y_n^1 + a_5 y_n^2 (x_0)^2 = -a_3 x_n - a_4 \sum_{i=1}^{n-1} y_{n-i}^1 y_i^1 - a_5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i y_{n-i}^2 x_{i-j} x_j.$$

Введя необходимые обозначения, получаем:

$$b_1 y_n^1 + b_2 y_n^2 = \Phi_1[y_1^1, \dots, y_{n-1}^1; y_1^2, \dots, y_{n-1}^2; x_1, \dots, x_n],$$

$$b_3 y_n^1 + b_4 y_n^2 = \Phi_2[y_1^1, \dots, y_{n-1}^1; y_0^2, \dots, y_{n-1}^2; x_0, \dots, x_n].$$

Отсюда легко найти искомые y_n^1, y_n^2 ; x_n определится выражением типа (6.69).

§ 6.5. Представление функций в пространстве малого времени

1. Если функция $F(x(t), t)$ аналитическая, то она всегда может быть представлена рядом по степеням параметра τ на основании известной теоремы о том, что сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

В общем случае для вычисления коэффициентов в разложении

$$F^*(x(\tau), \tau) = F_0 + F_1\tau + F_2\tau^2 + \dots + F_n\tau^n + \dots \quad (6.70)$$

можно воспользоваться формулой Тейлора в следующем рекуррентном виде:

$$F_n = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial F_{n-1}(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial F_{n-1}(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] \Big|_{\tau=0}, \quad (6.71)$$

$$F_0 = F^*(x, \tau) \Big|_{\tau=0}.$$

Часто более удобна непосредственная подстановка $x = \sum_n x_n \tau^n$ в функцию $F(x)$. Это позволяет сразу получить формулы для F_n через коэффициенты разложения x , например, если $F(x)$ — полином по x . Таким способом будет выведена формула (6.73).

Можно применить следующий прием, который хорош тем, что позволяет получать для F_n рекуррентные формулы. Возьмем одну-две производные от функции $F(x(\tau), \tau)$ и из них составим дифференциальное уравнение относительно этой функции. Решая это уравнение, найдем формулу для F_n .

В качестве примера рассмотрим $y = \sin x(\tau)$, $z = \cos x(\tau)$. Возьмем производные $y' = \cos x \cdot x'$, $z' = -\sin x \cdot x'$. Составим уравнения $y' = zx'$, $z' = -yx'$. Отыскивая решения в виде

$$y = \sum_{n=0} y_n \tau^n, \quad z = \sum_{n=0} z_n \tau^n, \quad \text{получаем}^1:$$

$$y_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) x_{n-k} z_k,$$

$$z_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) x_{n-k} y_k.$$

Этот третий способ будет использован для вывода формулы (6.75).

¹ Формулы, аналогичные приведенным, ранее несколько иным путем были получены В. Корсуковым.

Если $F(x, t)$ не является аналитической функцией, для которой существует адекватное представление (6.70), или задана графиком, таблицей, то решается соответствующая задача аппроксимации для приближенного представления функции в виде (6.70) или, может быть, сначала в виде степенного ряда.

2. Остановимся подробнее на представлении $F(t)$ в виде ряда по τ . В общем случае, как следует из (6.71), после подстановки вместо t его выражения через τ получим

$$F_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n F^*(\tau)}{d\tau^n} \right|_{\tau=0}.$$

Можно сразу использовать разложение

$$t = \Pi^{-1}\tau = \gamma \sum_n a_n \tau^n, \quad \gamma = \text{const.} \quad (6.72)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M A_m t^m &= \sum_{m=1}^M A_m \gamma^m \sum_{n=m}^{n-1} \sum_{i_1=m-1}^{i_1-1} \dots \\ &\dots \sum_{i_{m-1}=1}^{i_{m-2}} a_{n-i_1} a_{i_1-i_2} \dots a_{i_{m-1}} \tau^n, \quad M < \infty. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Функция, представленная рядом по степеням t , может быть записана так:

$$F(t) = \sum_{m=1}^M A_m t^m = \sum_{m=1}^M A_m \gamma^m \sum_{n=m} R_n^m \tau^n, \quad (6.74)$$

где коэффициенты могут быть вычислены заранее в соответствии с (6.73), так как они зависят только от вида отображения (6.72).

Впрочем, пользоваться выражением типа (6.73) для вычисления очень неудобно, потому что с ростом m и n количество вычислений резко увеличивается. Лучше использовать рекуррентную зависимость, которую легко получить описанным выше способом.

Рассмотрим выражение

$$y = a^m = \left(\sum_{n=s} a_n \tau^n \right)^m = \sum_{n=ms} R_n^m \tau^n. \quad (6.75)$$

Запишем производную $y' = m a^{m-1} a'$ и составим уравнение $ay' = m a' y$. Решая его, получаем

$$R_n^m = \frac{1}{a_s (n - ms)} \sum_{k=s}^{n+ms-ms-1} a_{k+1} [(1+m)(1+k) - n - s] R_{n+s-k-1}^m,$$

$$R_{ms}^m = a_s^m.$$

Если $s \geq 1$, то $R_n^m = 0$ при $n < ms$. При $s = 0$ это совпадает с выражением, которое содержится в [24]. В методе функциональных параметров, как правило, $s = 1$, тогда

$$R_n^m = \frac{1}{a_1(n-m)} \sum_{k=1}^{n-m} a_{k+1} [m(k+1) + k - n] R_{n-k}^m. \quad (6.76)$$

По этой формуле на ЭВМ за несколько секунд вычисляется достаточное число коэффициентов R_n^m , поэтому нет необходимости в многочисленных вспомогательных таблицах, приведенных в работе [39] и основанных на применении формулы

$$R_n^m = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \left(\sum_k a_k \tau^k \right)^m \right]_{\tau=0}.$$

В методе пространства малого времени используется зависимость $\tau = 1 - e^{-qt}$, которой соответствует разложение

$$t = \frac{1}{q} \ln(1 - \tau) = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n}. \quad (6.77)$$

Здесь $\gamma = 1/q$, $a_n = 1/n$, поэтому

$$R_n^m = \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} \left(m + \frac{k-n}{k+1} \right) R_{n-k}^m, \quad n > m, \quad (6.78)$$

$$R_m^m = 1.$$

Так как при $m > n$ $R_n^m = 0$, то формулу (6.74) можно записать в более естественной форме:

$$\sum_{m=1}^n A_m t^m = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \tau^n, \quad (6.79)$$

$$F_n = \sum_{m=1}^n \frac{A_m}{q^m} R_n^m. \quad (6.80)$$

Из того, что ряд (6.77) сходится при $t \in [0 \div \infty)$, следует, что он сходится абсолютно и по признаку Вейерштрасса равномерно при $t \in [0 \div \bar{T}]$ для любого $\bar{T} < \infty$. Следовательно, в промежутке $[0 \div \bar{T}]$ его можно возводить в степень с любым натуральным показателем, из чего следует сходимость ряда (6.79) в любом конечном промежутке.

Формулы (6.79), (6.80) могут быть использованы для улучшения сходимости в простом методе степенных рядов. С их помощью степенные ряды можно перестраивать в функциональные, которые будут сходиться не в промежутке $t \in [0 \div 1)$, а при произвольных значениях t . Однако очевидно, что проще сразу записать и решать уравнения в малом времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ И МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Глава 7

ЭЛЕМЕНТЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 7.1. Общие сведения.

Структура пространства управлений

В теории оптимального управления широкое развитие получили два направления:

- а) теория, основанная на принципе максимума Понтрягина;
- б) динамическое программирование.

Теоретические аппараты этих двух направлений оказались достаточно эффективными при развитии аналитической теории оптимальных процессов и изучении конкретных систем с малой размерностью.

Однако современные задачи оптимального управления, как правило, имеют большую размерность, в связи с чем вопросы алгоритмизации процесса выбора оптимального управления тесно связаны с вопросами вычислительной эффективности того или иного метода.

В этом аспекте методы указанных направлений приводят к явлению «проклятия размерности», и преодоление затруднений «проклятия размерности» идет главным образом по пути развития численных методов, основанных на иных идеях, нежели идеи принципа максимума Понтрягина и динамического программирования.

Дело в том, что в этих методах исходная задача оптимального управления для системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, редуцируется к некоторой новой задаче, имеющей существенно большую размерность (или пространство состояний $E(\Omega)$ задано над областью $\Omega \subseteq R^N$, где размерность евклидова пространства R^N велика). Реализация алгоритмов выбора оптимального управления на ЭВМ среднего класса (типа БЭСМ-4) приводит к тому, что предельными оказываются размерности исходной системы ~ 6 (более подробно этот вопрос освещен в § 7.2).

Высокая вычислительная эффективность метода пространства малого времени наводит на мысль о построении асимптотических алгоритмов выбора оптимального управления.

Несколько лет назад подобные работы были начаты, и на основе полученных результатов в настоящее время можно говорить о новом научном направлении в рамках математического программирования — асимптотического программирования.

Итак, асимптотическое программирование изучает процессы принятия оптимальных решений при эволюции системы в функциональном параметрическом пространстве.

Отметим, что часто цель функционирования системы в задачах оптимального управления задана так:

$$x(t) \Big|_{t=t_1} \xrightarrow{T} x_1(T),$$

т. е. необходимо перевести систему из состояния $x(t)$ при $t=t_1$ в состояние $x_1(T)$ за время T , при этом управление $u \in \bar{U}$ выбирается из условия оптимального в некотором смысле перевода. Здесь управление зависит не только от текущего состояния системы, но и от времени T (времени конца функционирования системы).

В связи с этим в асимптотическом программировании в общем случае необходимо рассматривать параметрическое пространство вида

$$I_a = I \times \bar{I}_T, \quad I \subseteq [0 \div \infty), \quad \bar{I}_T \in [t_1 \div T).$$

Соответственно функциональное пространство будет иметь структуру

$$\bar{I}_a = I_1 \times I_T, \quad I_1 \subseteq [0 \div 1), \quad I_T \subseteq [0 \div \tau_T).$$

Это в свою очередь требует введения в рассмотрение двух функциональных параметров:

$$\tau \in I_1, \quad \tau = 1 - \exp(-qt); \tag{7.1}$$

$$\tau_T \in I_T, \quad \tau_T = 1 - \exp[-q(T - t_1)].$$

На первом этапе в соответствии с общей процедурой метода пространства малого времени постулируем существование асимптотических разложений

$$u = u_0(t_1, T) + u_1(t_1, T)\tau + u_2(t_1, T)\tau^2 + \dots \\ \dots + u_n(t_1, T)\tau^n + O(\tau^{n+1}). \tag{7.2}$$

Далее необходимо также постулировать существование асимптотических разложений $u_n(t_1, T)$ по шкале $\{\tau_T^n\}$

$$u_n(t_1, T) = u_{n0} + u_{n1}\tau_T + u_{n2}\tau_T^2 + u_{n3}\tau_T^3 + \dots + u_{nm}\tau_T^m + O(\tau_T^{m+1}). \tag{7.3}$$

Постулирование форм (7.1)—(7.3) накладывает определенные ограничения на структуру пространства управлений, в связи с чем мы кратко обсудим этот вопрос.

В теории оптимального управления рассматриваются два вида управлений: программное и с обратной связью.

В задаче о программном управлении оно определяется в виде функции времени

$$u = u(t, t_1, T), \quad t \in \bar{I}_T,$$

тогда как в задаче синтеза управления с обратной связью управление должно иметь структуру

$$u = u[x(t_1), t_1, T]. \quad (7.4)$$

Сравнивая (7.3) и (7.4), видим, что в асимптотическом программировании для задач синтеза управление должно иметь вид

$$u = u[x(t_1), T - t_1]. \quad (7.5)$$

Это же имеет место и для программного управления.

Отсюда вытекает первое ограничение на структуру пространства \bar{U} : пространство \bar{U} включает элементы, зависящие от аргумента $T - t_1$.

Формы (7.2), (7.3) обладают гладкостью по $\{\tau, \tau_T\}$, и это должно отразиться на структуре \bar{U} . Требуя аналитичности по $\{\tau, \tau_T\}$, мы должны наложить это ограничение и на \bar{U} (т. е. считать, что \bar{U} включает функции, аналитичные по $\{\tau, \tau_T\}$). Однако это требование не всегда обязательно (почему — будет ясно из дальнейшего). Требование аналитичности мы заменим более слабым требованием, а именно: элементы пространства \bar{U} допускают аппроксимации типа (7.2), (7.3).

Таким образом, в асимптотическом программировании в качестве пространства \bar{U} рассматривается пространство \bar{U} , элементы которого зависят от аргумента $(T - t_1)$ и допускают аппроксимации типа (7.2), (7.3).

Для дальнейшего также полезно ввести пространство асимптотических управлений $\bar{U}_a \subset \bar{U}$. Нетрудно показать, что \bar{U}_a есть компактное множество, содержащее полиномы вида (7.2), (7.3), принадлежащее $C(I_1 \times I_T)$ ($I_1 \subseteq [0 \div 1]$).

Известно, что множество $M \subset C(0, 1)$, содержащее полиномы типа $P(\tau) = \sum_{n=0}^N B_n \tau^n$, есть компактное множество.

Поскольку множество \bar{U}_a содержит аппроксимации типа (7.2), (7.3), можно выбрать некоторое сколь угодно большое значение N и рассматривать в (7.3) полиномы вида

$$u(\tau) = \sum_{n=0}^N u_n(\tau_T) \tau^n.$$

Соответственно множество \bar{U}_a^1 , содержащее эти полиномы, будет компактным в $C(I_1)$.

Поскольку полиномы типа $u_n(\tau_T) = \sum_{k=0}^M a_{nk} \tau_T^k$ также принадлежат

M и $\bar{U}_a \subset \bar{U}_a^1$, то $\bar{U}_a \in C(I_1 \times I_T)$ есть компактное множество.

З а м е ч а н и е. В задачах теории оптимального управления очень часто возникают случаи, когда условия непрерывности управления по времени не выполняются (например, релейное управление) и в связи с этим может появиться ощущение узости пространства \bar{U}_a .

Для программного управления в подобных задачах следует говорить об аппроксимации типа (7.2) (регуляризации управления).

В задаче синтеза управление дается только первым коэффициентом (7.2) $u = u_0(t, T, x)$; поскольку на управление не накладывается никаких ограничений в смысле гладкости по x , то в задаче синтеза возможны реализации и негладких (например, кусочно-непрерывных) управлений.

§ 7.2. Структура алгоритмов

асимптотического программирования.

Семейство функционалов, зависящих от параметра

Как известно, в вариационных методах принимается представление управления в виде линейного агрегата

$$u_N = \sum_n^N b_n \Psi_n(t), \quad (7.6)$$

где $\{\Psi_n(t)\}$ — система координатных функций.

В этом случае от процедуры минимизации функционала по u переходят к процедуре минимизации по коэффициентам b_n (например, в методах Бубнова — Геллеркина или Ритца). Возникает вопрос о принципиальных отличиях алгоритмов асимптотического програмирования от алгоритмов известных вариационных методов [51].

Для выяснения этого вопроса достаточно записать структуру основных алгоритмов

$$u_n = F_n(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}), \quad (7.7)$$

$$\bar{u}_n = u_{0n}.$$

Алгоритмы типа (7.7) будем называть позиционными. Их основная особенность состоит в том, что значения коэффициентов \bar{u}_n зависят только от значений коэффициентов низших номеров.

В известных вариационных методах, как правило, алгоритмы относятся к группе алгоритмов аппроксимации, в которых

любой коэффициент b_k зависит от всего набора $\{b_0, \dots, b_{k-1}, b_{k+1}, \dots, b_m\}$.

Резюме. Основные алгоритмы асимптотического программирования имеют структуру (7.7), т. е. относятся к группе позиционных алгоритмов.

Замечание. При решении конкретных экстремальных задач процедуру минимизации надо осуществлять по всему набору $\{u_{nk}\}$, однако в (7.7) записана структура только для $\bar{u}_n = u_{0n}$. Здесь принят постулат о том, что в наборе $\{u_{kn}\}$ линейно-независимыми оказываются только коэффициенты набора $\{u_{0n}\}$. Далее, в § 7.9, будет показано, что постулат оказывается справедливым.

Этот факт имеет существенное значение с точки зрения вычислительной эффективности асимптотических алгоритмов, поскольку на его основе удастся резко сократить число переменных, по которым осуществляется оптимизация. Второе принципиальное отличие методов асимптотического программирования покажем на простейшей экстремальной задаче

$$\Psi = \min_u \Phi(u). \quad (7.8)$$

Для ее решения вариационным методом необходимо подставить управление u вида (7.6) в (7.8) и перейти к новой задаче

$$\Psi^N = \min_{\{b_0, \dots, b_N\}} \Phi^N(b_0, \dots, b_N).$$

Такой путь совершенно не пригоден для построения алгоритмов типа (7.7). Это связано с тем, что исходная задача (7.8) не содержит параметра, необходимого для асимптотического анализа. Поэтому в асимптотическом программировании вводится в рассмотрение некоторый физический (или просто формальный) параметр (для определенности пусть τ_T) и вместо задачи (7.8) решается более общая задача

$$\Psi(\tau_T) = \min_u \Phi(u, \tau_T). \quad (7.9)$$

В задаче (7.9) $\Phi(u, \tau_T)$ — уже не функционал, а семейство функционалов, зависящих от параметра τ_T (в дальнейшем будем называть $\Phi(u, \tau_T)$ общим функционалом).

По существу мы заменили исходную задачу более общей (7.9), решение которой возможно асимптотическими методами.

§ 7.3. Выбор оптимального управления на основе уравнений динамического программирования методом пространства малого времени

Прежде чем перейти к основным теоремам асимптотического программирования, рассмотрим задачу о выборе оптимального управления на основе уравнений динамического программирования.

Задачу о синтезе оптимального управления можно записать в виде [79]:

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad x = x_0|_{t=0}; \quad (7.10)$$

$$y = Bx, \quad t \in I_T, \quad I_T \subset [0 \div T];$$

$$F(x, u, t) \in C^\infty(I_T \times E(R) \times \bar{U}), \quad x \in E(R), \quad u \in \bar{U};$$

$$\Psi(x, t) = \min_{u \in \bar{U}} \int_t^T W(y, u, \sigma) d\sigma, \quad (7.11)$$

$$W(g) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad \bar{\Omega} = \Omega_y \times \bar{U} \times I_T,$$

$$\Psi(x, t) \in C^1(I_T \times \bar{U}_x), \quad \bar{U} \rightarrow U_x, \quad u \rightarrow x.$$

Принцип оптимальности Беллмана приводит к уравнению [15]

$$\min_{u \in \bar{U}} \left[W(y, u, t) + \frac{d\Psi}{dt} \right] = 0,$$

а на оптимальной траектории

$$\frac{d\Psi}{dt} = -W(x, u, t), \quad \nabla_u [W(x, u, t)] + \frac{d\Psi}{dt} = 0. \quad (7.12)$$

Если существует оператор $H(\Psi, x, t)$, определяющий вектор u из уравнения (7.12):

$$u = H(\Psi, x, t),$$

то для (7.11) можно записать задачу Коши

$$\frac{d\Psi}{dt_1} = B\Psi, \quad g \in \Omega, \quad \Omega \subseteq R^N; \quad (7.13)$$

$$\Psi = \Psi_0|_{t_1=0},$$

где N — размерность пространства $E(R)$,

$$\Psi \in E_1(\Omega), \quad t_1 = T - t, \quad B\Psi = W(\Psi, t) + [\nabla \Psi \cdot F(x, \Psi, t)].$$

Для задачи (7.13) можно построить асимптотическое решение

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \tau_T + \Psi_2 \tau_T^2 + \Psi_3 \tau_T^3 + \dots + \Psi_n \tau_T^n + O(\tau_T^{n+1}),$$

$$\tau_T = 1 - \exp[-q(T - t)].$$

Если построить оператор $H(\Psi, x, t)$ нелегко, то необходимо решить такую задачу:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_1} = W(x, u, t_1) + [\nabla \Psi F(x, \Psi, t)], \quad (7.14)$$

$$\nabla_u \{W(x, u, t_1) + [\nabla \Psi F(x, \Psi, t)]\} = 0,$$

$$g \in \Omega, \quad \Omega \subseteq R^N, \quad \Psi = \Psi_0|_{t_1=0} = 0, \quad t_1 \in [0 \div T],$$

$$\Psi \in E_1(\Omega), \quad u \in \bar{U}.$$

Записав асимптотические разложения управления u в виде

$$u = u_0 + \tau_1 u_1 + \tau_1^2 u_2 + \tau_1^3 u_3 + \dots + \tau_1^n u_n + O(\tau_1^{n+1}),$$

можно также построить и асимптотическое решение задачи (7.14).

Рассмотрим подробнее задачу о синтезе линейной оптимальной системы управления.

Пусть линейный динамический процесс описывается задачей

$$\dot{x}(t) = Ax + Cu + f, \quad (7.15)$$

$$y = Bx, \quad t \in I_T, \quad \{f; u\} \in C(I_T), \quad x \in C^1(I_T);$$

$$x = x_0|_{t=0}, \quad \Psi(x, t) = \min_{u \in \bar{U}} \int_0^T W(y, u, \sigma) d\sigma.$$

Здесь A — матрица ($N \times N$); C — матрица ($N \times K$); B — матрица ($m \times N$); u — управление; y — выход; f — сигнал возмущения по нагрузке.

Если функция $\Psi(x, t) \in C^1(I_T \times \bar{U}_x)$, $x \in \bar{U}_x$ при отображении $u \rightarrow x$, $\bar{U} \rightarrow \bar{U}_x$, то согласно принципу оптимальности Беллмана она удовлетворяет уравнениям (7.11), (7.12), которые сводятся к системе уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} [\nabla \Psi, F] = 0, \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + W(g) + [\nabla \Psi, F] = 0.$$

В этой задаче оператор $H(\Psi, x, t)$ определяет вектор u из первых уравнений системы (7.16):

$$u = H(\Psi, x, t),$$

и задача сводится к задаче (7.13).

Существует ряд методов фактического вычисления асимптотических разложений, но в настоящей работе будет рассмотрен только метод рекуррентных соотношений.

Пусть оператор $B\Psi$ допускает представление

$$B\Psi = \tau B^1 \Psi_1 + \tau^2 B^2 (\Psi_1, \Psi_2) + \dots + \tau^k B^k (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k).$$

Тогда функции $\Psi_n(x)$ определяет рекуррентная формула

$$\Psi_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \Psi_{n-1} + \frac{1}{qn} B^{n-1} (\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}). \quad (7.17)$$

Если

$$\|B^{n-1}\|_C \leq M \|\Psi_{n-1}\|_C n^\alpha, \quad \alpha < 1,$$

то асимптотические разложения будут определять последовательность Коши для интервала $I_1 \subseteq [0 \div 1]$.

Рассмотрим задачу синтеза линейной системы с квадратичной функцией ошибки

$$W(g_1) = \|D - y\|_{R^m}^2 + \rho \|u\|_{R^k}^2,$$

где $D \in C(I_T)$ — желаемый выходной сигнал. Операторы H, B в этой задаче имеют вид:

$$H(\Psi, \tau) = -\frac{1}{2\rho} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} c_n, \quad (7.18)$$

$$B\Psi = \|D - y\|_{R^m}^2 - \rho \|H\|_{R^k}^2 + \sum_{n=1}^N (A_n x + f_n) \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}, \quad (7.19)$$

$$A_n x = \sum_{p=1}^N A_{np} x_p.$$

Для получения аналитических результатов можно использовать непосредственно формулу (7.17), построив разложение оператора $B\Psi$, однако в алгоритме с применением ЭВМ удобнее постулировать форму функции

$$\Psi = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N a_{np}(\tau_1) x_n x_p + \sum_{n=1}^N a_n(\tau_1) x_n + c(\tau_1). \quad (7.20)$$

Для (7.20) оператор $B\Psi$ можно записать в виде

$$B\Psi = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N b_{np}(\tau_1) x_n x_p + \sum_{n=1}^N b_n(\tau_1) x_n + l(\tau_1),$$

где

$$b_{np}(\tau_1) = \sum_{i=1}^k b_{ni} b_{pi} - \frac{1}{4\rho} \sum_{q=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^K \bar{a}_{ns}(\tau_1) \bar{a}_{qi}(\tau_1) c_{ns} c_{nq} + \sum_{q=1}^N A_{qn} \bar{a}_{qp}(\tau_1),$$

$$b_n^-(\tau_1) = -2 \sum_{p=1}^N D_p b_{np} - \frac{1}{2\rho} \sum_{q=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^K \bar{a}_s(\tau_1) a_s(\tau_1) c_{ns} c_{nq} + \\ + \sum_{p=1}^N f_p \bar{a}_{np}(\tau_1),$$

$$l(\tau_1) = \sum_{p=1}^N D_p^2 - \frac{1}{4\rho} \sum_{q=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^K a_s(\tau_1) a_q(\tau_1) c_{gi} c_{si} + \sum_{p=1}^N a_p(\tau_1) f_p',$$

$$\bar{a}_{np}(\tau_1) = \begin{cases} a_{np}(\tau_1), & n \neq p; \\ 2a_{np}(\tau_1), & n = p, \end{cases}$$

$$a_{np}(\tau_1) = a_{pn}(\tau_1).$$

Если принять разложения функций

$$\gamma(\tau) \in \{a_{np}(\tau_1); b_{np}(\tau_1); a_n(\tau_1); c(\tau_1); l(\tau_1)\}$$

в виде

$$\gamma(\tau_1) = \gamma_0 + \tau_1 \gamma_1 + \tau_1^2 \gamma_2 + \tau_1^3 \gamma_3 + \dots + O(\tau_1^n), \quad (7.21)$$

то для коэффициентов γ будут справедливы рекуррентные соотношения:

$$a_{kp}^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{kp}^{n-1} + \frac{1}{qn} b_{kp}^{n-1},$$

$$a_p^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_p^{n-1} + \frac{1}{qn} b_p^{n-1},$$

$$c^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) c^{n-1} + \frac{1}{qn} l^{n-1}.$$

Задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве малого времени, описывающую рассматриваемый динамический процесс с управлением, можно записать так:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} (1 - \tau) = \frac{1}{q} [A_u(\tau) x + f_1], \quad \tau \in I_1; \quad (7.22)$$

$$x = x_0 |_{\tau=0},$$

где

$$\tau = 1 - e^{-qt}, \quad A_u(\tau) \in C(I_1),$$

$A_u(\tau)$ — матрица $(N \times N)$ -системы с управлением

$$f_1 = f - \frac{1}{2\rho} \sum_{n=1}^N a_n(\tau) c_n,$$

c_n — матрица-столбец.

Найдем решение задачи (7.22)

$$x = x_0 + \tau x_1 + \tau^2 x_2 + \tau^3 x_3 + \tau^4 x_4 + \dots + \tau^n x_n + O(\tau^{n+1}).$$

Записывая матрицы $A_u(\tau)$ и $f_1(\tau)$ в виде полиномов

$$A_u(\tau) = A_u^0 + \tau A_u^1 + \tau^2 A_u^2 + \dots + \tau^s A_u^s,$$

$$f_1(\tau) = f_1^0 + \tau f_1^1 + \tau^2 f_1^2 + \dots + \tau^n f_1^n,$$

обычным приемом получаем рекуррентную формулу

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{nq} \left(\sum_{p=0}^L A_u^p x_{n-1-p} + f_1^{n-1} \right),$$

где

$$L = \begin{cases} n-1, & (n-1) \leq s; \\ s, & (n-1) > s. \end{cases}$$

В задаче (7.13) коэффициенты $a_{np}(\tau_i)$ определяются в виде рядов (7.21), тогда как в задаче (7.22) необходимо задавать $a_{np}(\tau)$ в виде рядов по степеням τ . В связи с этим при переходе от задачи (7.13) к (7.22) возникает дополнительная задача определения этих рядов, которую можно решить путем построения разложения по τ , используя связь малых времен:

$$\tau_1 = (\tau_T - \tau)/(1 - \tau), \quad \tau_T = 1 - e^{-qT}.$$

Приведем несколько простых примеров. В качестве первого рассмотрим задачу оптимизации для объекта регулирования первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} (1 - \tau) = -Ax + Cu, \quad W(g_1) = x^2 + \rho u^2.$$

Здесь

$$u = -\frac{c}{2\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi = a(\tau) x^2.$$

Для коэффициента a_n асимптотического разложения справедлива рекуррентная формула

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1} + \frac{1}{q^n} \left[s(n) - 2Aa_{n-1} - c_p \sum_{p=1}^{n-1} a_p a_{n-1-p} \right],$$

где

$$c_p = c^2/\rho, \quad s(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Ограничиваясь асимптотикой

$$a(\tau) = \tau_1 a_1 + \tau_1^2 a_2 + \tau_1^3 a_3 + \tau_1^4 a_4 + \tau_1^5 a_5 + O(\tau_1^6),$$

$$q = \sqrt{4A^2 + c_p^2},$$

рассмотрим несколько вариантов для числовых значений A и c_p .

А. М. Летоным для стационарного оптимизирующего функционала в этой задаче получено замкнутое решение, с которым возможно сопоставление наших результатов при $\tau_1 \rightarrow 1$. Согласно решению А. М. Летова,

$$a|_{\tau_1=1} = \frac{\sqrt{A^2 + c_p^2} - A}{c_p}.$$

1. В нашем примере при $A=1$, $c_p=1$, $q = \sqrt{5}$ имеем

$$a(\tau_1) = 0,446\tau_1 + 0,024\tau_1^2 - 0,021\tau_1^3 - 0,013\tau_1^4 - 0,006\tau_1^5 + O(\tau_1^6),$$

откуда $a(\tau_1) \rightarrow 0,43$, по Летоу $\tau_1 \rightarrow 1$, $a|_{\tau_1=1} = 0,42$, ошибка $\Delta \sim 2\%$.

2. $A=1$, $c_p=0,2$, $q = \sqrt{4,04}$

$$a(\tau_1) = 0,495\tau_1 + 0,001\tau_1^2 - 0,008\tau_1^3 - 0,005\tau_1^4 + O(\tau_1^5),$$

$$a(\tau_1) \rightarrow 0,483, \quad \tau_1 \rightarrow 1, \quad a|_{\tau_1=1} = 0,475, \quad \Delta \sim 1,5\%.$$

Для малых значений c_p/A хорошие результаты дает первое приближение

$$a_1(\tau_1) = \frac{\tau_1}{q} + O(\tau_1^2).$$

В рассматриваемом примере

$$a(\tau_1) = 0,495\tau_1 + O(\tau_1^2)$$

с ошибкой порядка 4% при $\tau_1 \rightarrow 1$.

3. $A=0,5$, $c_p=2$

$$a(\tau_1) = 0,446\tau_1 + 0,123\tau_1^2 + 0,003\tau_1^3 - 0,023\tau_1^4 - 0,019\tau_1^5 + O(\tau_1^6),$$

$$a_1(\tau_1) \rightarrow 0,520, \quad \tau_1 \rightarrow 1, \quad a|_{\tau_1=1} = 0,500, \quad \Delta \sim 3,5\%.$$

Как видно из примеров, даже в случае большого параметра c_p , определяющего влияние нелинейных членов уравнения на решение, асимптотика приводит к хорошим результатам для предельных значений параметра τ_1 .

Рассмотрим теперь пример, приведенный в монографии [45]:

$$\dot{x} = u, \quad y = x, \quad W(g_1) = (1-x)^2 + \rho x^2.$$

Функция Ψ выражается в виде

$$\Psi = \rho^{1/2} (1-x)^2 a(\tau_1),$$

а для коэффициентов разложения функции $a(\tau_1)$ справедлива рекуррентная формула

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1} - \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{n-1} a_p a_{n-1-p} + \frac{s(n)}{2},$$

по которой

$$a(\tau_1) = \frac{1}{2} \tau_1 \left[1 + \frac{1}{2} \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_1^2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \tau_1^n \right].$$

Суммируя ряд, получаем результат

$$a(\tau_1) = \frac{\tau_1}{1 - 1/2\tau_1}, \quad \tau_1 \in [0 \div T],$$

совпадающий с результатом Мерриэма [45].

§ 7.4. Асимптотическое разложение общего функционала по шкале малого времени

Как уже отмечалось, основные идеи асимптотического программирования хорошо прослеживаются на экстремальной задаче

$$\Psi(\tau_T) = \min_{u \in \bar{U}} \Phi(u, \tau_T),$$

где $\Phi(u, \tau_T)$ — общий функционал, $\Psi(\tau_T)$ — критерий качества системы.

Здесь и в дальнейшем будем полагать, что общий функционал имеет структуру, для которой в качестве допустимых могут служить управления типа (7.24), (7.25).

Перейдем от исходной задачи к задаче

$$\Psi(\tau_T) = \min_{\tilde{u} \in \bar{U}_a} \Phi(\tilde{u}, \tau_T), \quad (7.23)$$

где \tilde{u} — управление типа (7.2), (7.3).

Заметим, что общий функционал $\Phi(\tilde{u}, \tau_T) = \Phi(\tilde{u}(\tau_T), \tau_T)$, зависящий от параметра τ_T , уже есть функция независимой переменной τ_T , в связи с чем можно ввести в рассмотрение метрическое пространство $E_\Phi(I_T)$, элементами которого будут общие функционалы $\Phi(u, \tau_T) \in E_\Phi$. Дополнительно введем также пространство E_Φ^0 , элементами которого будут функционалы $\Phi(u(0), 0)$.

Теперь для общего функционала $\Phi(\tilde{u}, \tau_T)$ можно записать оператор эволюции $L(\tau_T, \tilde{u})$ и сформулировать задачу так:

$$L^*(\tau_T, \tilde{u}) \Psi(0) = \min_{\tilde{u} \in \bar{U}_a} L(\tau_T, \tilde{u}) \Phi(u_0, 0). \quad (7.24)$$

Задачу (7.24) следует изучать в классе корректности

$$K_1 = [\bar{U}_a, I_1, I_T, E(I), E_\Phi(I_T), \{\tau_T^n\}, 1]. \quad (7.25)$$

Если задача (7.24) обладает предельной корректностью в классе K_1 (7.25), то будет существовать разложение оператора эволюции $L(\tau_T, \tilde{u})$ по шкале $\{\tau_T^n\}$:

$$L(\tau_T, \tilde{u}) = 1 + \tau_T L_1 + \tau_T^2 L_2 + \tau_T^3 L_3 + \tau_T^4 L_4 + \dots + O(\tau_T^N), \quad (7.26)$$

$$L^*(\tau_T, \tilde{u}) = 1 + \tau_T L_1^* + \tau_T^2 L_2^* + \tau_T^3 L_3^* + \tau_T^4 L_4^* + \dots + O(\tau_T^N). \quad (7.27)$$

Разложение оператора $L(\tau_T, \tilde{u})$ строится известными методами в силу структуры общего функционала $\Phi(\tilde{u}, \tau_T)$ и свойства пространства $E_\Phi(I_T)$. При этом естественно требуется определенная гладкость общего функционала по u и τ_T . Если в качестве пространства $E_\Phi(I_T)$ рассматривать пространство $C^\infty(I_T)$, то разложение общего функционала представляется в виде ряда Тейлора

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{u}, \tau_T) &= \Phi(\tilde{u}_0, 0) + \tau_T \Phi'(\tilde{u}_0, 0) + \tau_T^2 \frac{\Phi''(\tilde{u}_0, 0)}{2!} + \\ &+ \tau_T^3 \frac{\Phi'''(\tilde{u}_0, 0)}{3!} + \dots + O(\tau_T^n), \end{aligned} \quad (7.28)$$

где $\Phi', \Phi'', \dots, \Phi^n$ — полные производные функции Φ по времени при $\tau_T = 0$.

В этом случае аналогично можно расписать разложение оператора $L(\tau_T, \tilde{u})$.

Если общий функционал непрерывен по управлению u и параметру τ_T , то в качестве $E_\Phi(I_T)$ следует рассматривать пространство $C(I_T)$. Задача построения разложения оператора $L(\tau_T, \tilde{u})$ для $E_\Phi(I_T) = C(I_T)$ оказывается более трудной, поскольку в итоге она сводится к задаче аппроксимации функций $L[\tau_T, \tilde{u}(\tau_T)] \in C(I_T)$ полиномом вида (7.26). Как следует из теории аппроксимаций [6], эта задача имеет решение, поэтому в общих теоремах асимптотического программирования полагают, что минимальные требования (в смысле гладкости) к общему функционалу сводятся к требованию непрерывности по управлению u и параметру τ_T .

З а м е ч а н и я: 1. Наиболее простыми алгоритмы асимптотического программирования оказываются в случае, когда $E_\Phi(I_T) \in C^\infty(I_T)$. Поэтому известное решение, полученное в настоящее время, построено для этого случая.

2. Управление u в рассматриваемом классе задач зависит от двух параметров (τ, τ_T) , тогда как для общего функционала принята зависимость только от одного параметра τ_T . Исключение из рассмотрения параметра τ в задаче (7.23) возможно, если общий функционал представим в виде

$$\Phi(u, \tau_T) = \Phi_1(u, \tau_T) + \Phi_2(u, \tau_T),$$

где $\Phi_1(u, \tau_T) = \int_{t_1}^{\tau_T} W(u, \tau, \tau_T) d\tau$ — интегральный функционал;

$\Phi_2(u, \tau_T)$ — функционал, зависящий от конечного состояния системы.

3. В ряде задач возможны решения в виде асимптотических разложений по одному параметру τ_T . Тогда общий функционал будет функцией параметра τ и соответствующие алгоритмы оказываются наиболее простыми (см. § 7.8—7.10).

Перейдем к обсуждению основного момента в асимптотическом программировании. Если разложение оператора $L(\tau_T, \tilde{u})$ по шкале τ_T не вызывает принципиальных затруднений, то совершенно иначе обстоит дело с разложением оператора $L(\tau_T, \tilde{u}^*)$.

В классе позиционных алгоритмов мы должны получить зависимости типа

$$L_n^* = F_n(L_0^*, L_1^*, \dots, L_{n-1}^*).$$

Следуя обычной процедуре построения асимптотических разложений для класса K_1 путем приравнивания членов, содержащих одинаковые степени τ , имеем

$$L_n^* = \min_{\tilde{u} \in \tilde{U}_a} L_n.$$

В силу особых свойств оператора $\min_{\tilde{u} \in \tilde{U}_a}$ законность этого приема

не очевидна, и необходим более тонкий анализ для определения алгоритмов вычисления L_n^* . Для выяснения этого вопроса был доказан ряд теорем по асимптотическому принципу оптимальности.

§ 7.5. Теоремы асимптотического принципа оптимальности

Дадим одну из формулировок асимптотического принципа оптимальности.

Если в экстремальной задаче

$$\Psi(\tau_T) = \min_{\tilde{u} \in \tilde{U}_a} \Phi(\tilde{u}, \tau_T)$$

существуют асимптотические разложения

$$\Phi(\tilde{u}, \tau_T) = \sum_{n=0}^N D_n(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k) \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}),$$

$$\Psi(\tau_T) = \sum_{n=0}^N D_n^*(\bar{u}_0^*, \bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_k^*) \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1})$$

и для некоторых номеров $n = k_1, k_2, \dots, k_\infty$ функций D_{k_i} выпуклы

по \bar{u}_{i-1} , то

$$D_{k_i}^* = \min_{\bar{u}_{i-1}} D_{k_i}(\bar{u}_0^*, \bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_i, u_{i+1}, \dots) \quad (7.29)$$

при некоторых ограничениях на структуру D_{k_i} .

Как следует из этой формулировки, выбор асимптотического оптимального управления сводится к последовательной процедуре:

$$1) \bar{D}_{k_1}^* = \min_{\bar{u}_0} D_{k_1}(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots) \text{ — отсюда определяется } \bar{u}_0^*;$$

$$2) \bar{D}_{k_2}^* = \min_{\bar{u}_1} D_{k_2}(\bar{u}_0^*, \bar{u}_1, \dots) \text{ — отсюда вычисляется } \bar{u}_1^*;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$3) \bar{D}_{k_i}^* = \min_{\bar{u}_{i-1}} D_{k_i}(\bar{u}_0^*, \dots, \bar{u}_{i-2}^*, \bar{u}_{i-1}, \dots) \text{ — отсюда получается } \bar{u}_{i-1}^*.$$

З а м е ч а н и е. В приведенной формулировке асимптотического принципа оптимальности предполагается, что из последовательности коэффициентов D_n можно выделить бесконечную последовательность $\{D_{k_i}\}$, в которой коэффициенты D_{k_i} выпуклы по \bar{u}_i . Однако основное утверждение асимптотического принципа оптимальности остается справедливым и для задач, в которых последовательность $\{D_n\}$ не содержит $\{D_{k_i}\}$, но на управление \bar{u}_i наложено модульное ограничение.

Для обоснования асимптотического принципа оптимальности автором был доказан ряд теорем.

Т е о р е м а 1. Если существуют асимптотические разложения общего функционала

$$\Phi(u, x, \tau, \tau_T) = \int_{t_1}^T W(x, u, \sigma) d\sigma = \sum_{n=1}^N D_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}),$$

$$u = \sum_{n=1}^K u_n \tau^n + O(\tau^{k+1}), \quad \tau = P(t, t_1), \quad \tau_T = P(T, t_1),$$

$$u_n = \sum_{n=1}^K u_{np} \tau_T^n + O(\tau_T^{k+1})$$

относительно шкал сравнения $\{\tau^a\}$, $\{\tau_T^a\}$ и

$$W(x, u, t) \in C(\bar{U} \times E \times I_T),$$

то асимптотическое разложение общего критерия качества

$$\Psi(x, t_1) = \min_{u \in \bar{U}} \int_{t_1}^T W(x, u, \sigma) d\sigma$$

будет

$$\Psi_N(x, t_1) = \sum_{n=1}^N D_n^* \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}), \quad \bar{D}_n^* = \min_{u_i \in A_n'} D_n, \quad (7.30)$$

где $A_n' = A_n/A_{n-1}$, A_n — счетное множество $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$, $k \leq n$, $\bar{u}_k = u_{0k}$.

Доказательство.

$$\Psi_N(x, t) = \min_{u_i \in A_N} \left[\sum_{n=1}^N D_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}) \right].$$

Ограничиваясь определенной точностью вычисления, имеем:

$$\int_{t_1}^T W(x, u, \sigma) d\sigma = \sum_{n=1}^N D_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}),$$

$$\int_{t_1+\delta}^T W(x, u, \sigma) d\sigma = \sum_{n=1}^{N-1} D_n \tau_{1T}^n + O(\tau_{1T}^N),$$

где $\tau_{1T} = P[T - (t_1 + \delta)]$.

Если $\delta \sim O(\tau_1^N)$, то

$$\int_{t_1+\delta}^T W(x, u, \sigma) d\sigma = \sum_{n=1}^{N-1} D_n \tau_T^n + O(\tau_T^N),$$

тогда

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta} W(x, u, \sigma) d\sigma = D_N \tau_T^N + O(\tau_T^{N+1}).$$

Теперь задача минимизации будет иметь вид

$$\min_{u_i \in A_N} \left[\int_{t_1}^T W(x, u, \sigma) d\sigma - \Psi_N(x, \tau_T) \right] = O(\tau_T^{N+1}).$$

Запишем интеграл в виде двух членов

$$\begin{aligned} \min_{u_i \in A_N} \left[\int_{t_1}^T W(x, u, \sigma) d\sigma + \int_{t_1}^{t_1+\delta} W(x, u, \sigma) d\sigma - \Psi_N(x, \tau_T) \right] = \\ = O(\tau_T^{N+1}). \end{aligned}$$

По принципу оптимальности Беллмана [14] имеем соотношение

$$\min_{n \in U} \left\{ \min_{u \in U} \left[\int_{t_1+\delta}^T W(x, u, \sigma) d\sigma + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_1}^{t_1+\delta} W(x, u, \sigma) d\sigma - \Psi(x, \tau_T) \right] \right\} = 0.$$

Применяя это уравнение к предыдущему, получаем

$$\min_{\bar{u}_i \in A_N - A_{N-1}} \left\{ \min_{u_i \in A_{N-1}} \left[\int_{t_1+\delta}^T W(x, u, \sigma) d\sigma + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_1}^{t_1+\delta} W(x, u, \sigma) d\sigma - \Psi_N(x, \tau_T) \right] \right\} = O(\tau_T^{N+1}). \quad (7.31)$$

Заметим, что набора $u_i^* \in A_{N-1}$ достаточно для определения

$$\Psi_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} D_n^* \tau_T^n,$$

но

$$\Psi_{N-1} = \int_{t_1+\delta}^T W(x, u, \sigma) d\sigma.$$

Если теперь каким-то образом удалось получить оптимальные значения $\bar{u}_i^* \in A_{N-1}$, тогда функциональное уравнение (7.31) для совокупности $\bar{u}_j^* \in A_{N-1}$ будет иметь вид

$$\min_{\bar{u}_j \in A_N / A_{N-1}} \left[\int_{t_1}^{t_1+S} W(x, \bar{u}, \sigma) d\sigma + \Psi_{N-1} - \Psi_N \right] = O(\tau_T^{N+1}).$$

Здесь

$$\bar{u}^* = \sum_{n=0}^i \bar{u}_n^* \tau^n + \bar{u}_j^* \tau^j + O(\tau^{j+1}),$$

$$\bar{u}_j^* \in A_N / A_{N-1}$$

или

$$\min_{\bar{u}_i \in A_N / A_{N-1}} (\bar{D}_N^* \tau^N + \Psi_{N-1} - \Psi_N) = O(\tau_T^{N+1}),$$

$$\bar{D}_N^* = \min_{u_j \in A_N} D_n.$$

На оптимальной траектории

$$\bar{D}_N^* \tau^N + \Psi_{N-1} - \Psi_N = O(\tau_T^{N+1}),$$

и тогда получим рекуррентную формулу

$$\Psi_N = \Psi_{N-1} + \bar{D}_N^* \tau^N + O(\tau^{N+1}),$$

согласно которой имеем:

$$\Psi_1 = \min D_1 \tau_1 = \bar{D}_1^* \tau_1 + O(\tau_1^2),$$

$$\Psi_2 = \Psi_1 + \bar{D}_2^* \tau_2^2 + O(\tau_2^3).$$

.....

$$\Psi_n^* = \sum_{n-1}^N \bar{D}_n^* \tau_n^n + O(\tau_T^{N+1}).$$

З а м е ч а н и я: 1. В теореме 1 учтено, что в наборе $\{u_{np}\}$ линейно-независимыми являются лишь $\{u_{0n} = \bar{u}_n\}$ и минимизация осуществляется только по этому набору.

2. С учетом линейной независимости только набора $\{u_{0n} = \bar{u}_n\}$ можно было бы в теореме 1 рассматривать только простые разложения управления

$$u = \sum_{n=0}^K u_n \tau^n + O(\tau^n),$$

как это сделано в работе [74]. Результат теоремы от этого не изменится, однако при реализации алгоритмов необходимо обязательно строить двойное разложение.

Для простых разложений алгоритмы асимптотического принципа оптимальности будут давать некоторое решение, однако оно не будет стремиться к оптимальному. В этом случае в качестве допустимых используются управления, имеющие жестко закрепленную точку при $t=t_1 (u_0 = \bar{u}_0)$. (На это обстоятельство обратил внимание О. В. Васильев.)

Для обеспечения подвижности начальной точки в зависимости от значений τ_T следует ввести разложения u_n по шкале $\{\tau_T^n\}$. Здесь мы встречаемся с довольно частым явлением для теории предельной корректности: выбор узкого класса шкал (в данном случае только $\{\tau^n\}$ для n) приводит к формальному решению, однако это решение не соответствует существу дела. Как правило, в подобных случаях необходимо задавать (если возникают затруднения с выбором правильной шкалы) более широкий класс шкал, а алгоритм будет сам формировать нужную шкалу в процессе вычислений.

Т е о р е м а 2. *Если в экстремальной задаче*

$$\Psi(\tau_T) = \min_{u \in \bar{U}} \Phi(u, \tau_T),$$

$$\Phi(u, \tau_T) > 0, \quad \tau_T \in I_T, \quad I_T \subseteq [0 \div 1),$$

и существуют асимптотические представления

$$u = \sum_{n=1}^N u_n + O(\tau_T^{N+1}), \quad u_n \in O(\tau_T^n);$$

$$\Psi = \Psi_N(\tau_T) + O(\tau_T^{N+1});$$

$$\Psi_N = \min_{u^N \in \bar{U}^N} \Phi_N(u, \tau_n), \quad u^N = \sum_{n=1}^N u_n;$$

$$\Phi(u, \tau_T) = \Phi_N(u^N, \tau_T) + O(\tau_T^{N+1}),$$

то будет справедливо функциональное уравнение

$$\min_{u^N \in \bar{U}^N / \bar{U}^{N-1}} [\Phi_N(\bar{u}^N, \tau_T) - \Psi_N(\tau_T)] = O(\tau_T^{N+1}),$$

где $\bar{u}^N = u^{*N-1} + u_N$; u^{*N-1} — асимптотическое оптимальное управление $(N-1)$ -приближения.

Доказательство. Вначале осуществляется переход от оптимизации по u к оптимизации по u^N и исходная задача заменяется приближенной

$$\Psi_N(\tau_T) = \min_{u^N \in \bar{U}^N} \Phi(u^N, \tau_T). \quad (7.32)$$

Множество \bar{U} , которому принадлежит управление \bar{U} , можно записать в виде прямого произведения

$$\bar{U}_a = \bigotimes_{n=1}^N \bar{U}_{na}, \quad u_n \in \bar{U}_{na}.$$

Тогда в приближенной задаче (7.32) множество \bar{U}_a^N определится следующим образом:

$$\bar{U}_a^N = \bigotimes_{n=1}^N \bar{U}_{na}.$$

Далее разобьем интервал I_T на два интервала:

$$1) I_{T_1} \subseteq [0 \div k\tau_T], \quad k < 1;$$

$$2) I_{T_2} \subseteq [k\tau_T \div \tau_T].$$

Если принять $k = \sqrt[N]{\tau_T}$, то на первом интервале управление

$$u = u^{N-1} + O(\tau_{T_1}^N), \quad \tau_{T_1} = k\tau_T$$

будет иметь асимптотическое представление по шкале $\{\tau_T^N\}$. На этом интервале

$$u(\tau_{T_1}) = u^{N-1} + O(\tau_T^{N-1}),$$

$$\begin{aligned}\Psi_{N+1}(k\tau_T) &= \min_{u^{N-1} \in \bar{U}_a^{N-1}} \Phi(k\tau_T) + O(\tau_T^N) = \\ &= \min_{u^{N-1} \in \bar{U}_a^{N-1}} \Phi_{N-1}(k\tau_T) + O(\tau_T^{N+1});\end{aligned}$$

точное соотношение

$$\min_{u \in \bar{U}} [\Phi - \Psi] = 0$$

для задачи (7.32) переходит в асимптотическое соотношение

$$\min_{u^N \in \bar{U}_a^N} [\Phi_N - \Psi_N] = O(\tau_T^{N+1}). \quad (7.33)$$

Введем функционал

$$\Delta\Phi_N \stackrel{\Delta}{=} \Phi(u^N, \tau_T) - \Phi(u^{N-1}, k\tau_T),$$

с помощью которого (7.33) перепишем в виде

$$\min_{u^N \in \bar{U}^N} [\Delta\Phi_N + \Phi_{N-1}(k\tau_T) - \Psi_N] = O(\tau_T^{N+1}).$$

По принципу оптимальности Беллмана происходит редукция

$$\min_{I_T^u} [] = 0 \rightarrow \min_{I_{T_2}^u} [\min_{I_{T_1}^u} []] = 0.$$

В нашем случае она имеет вид

$$\min_{I_T^{u^N} \in \bar{U}^N} [] = O(\tau_T^{N+1}) \rightarrow \min_{I_{T_2}^{u^N} \in \bar{U}^N} [\min_{I_{T_1}^{u^N} \in \bar{U}^{N-1}} []] = O(\tau_T^{N+1}).$$

Минимизируя выражение во внутренних скобках, получаем

$$\min_{I_{T_2}^{u^N} \in \bar{U}^N} [\Delta\bar{\Phi}_N + \Psi_{N-1} - \Psi_N] = O(\tau_T^{N+1}),$$

где

$$\Delta\bar{\Phi}_N \stackrel{\Delta}{=} \Phi(\bar{u}^N, \tau_T) - \Phi(u^{*N-1}, k\tau_T) \quad (7.34)$$

является функцией u_N , и, следовательно, можно осуществить вторую редукцию

$$\min_{I_{T_2}^{u^N} \in \bar{U}^N} \rightarrow \min_{I_{T_2}^{u_N} \in \bar{U}^N / \bar{U}^{N-1}} \quad (7.35)$$

Выражение (7.35) приводит к нужному функциональному соотношению

$$\min_{u_N \in \bar{U}^N / \bar{U}^{N-1}} [\Delta\bar{\Phi}(u_N) - \Psi_{N-1} - \Psi_N] = O(\tau_T^{N+1}), \quad (7.36)$$

или

$$\min_{u_N \in \bar{U}^N / \bar{U}^{N-1}} [\Phi_N(\bar{u}^N) - \Psi_N] = O(\tau_T^{N+1}). \quad (7.37)$$

З а м е ч а н и е. Из функциональных соотношений (7.36) и (7.37) легко восстанавливается результат теоремы 1.

Положим:

$$\begin{aligned} \Phi_N &= \sum_1^N D_n \tau_T^n, & u_n &= \tau_T^n \bar{u}_n, \\ \Psi_N &= \sum_1^N D_n^* \tau_T^n, & D_n &= D_n(\bar{u}, \dots, \bar{u}_n). \end{aligned} \quad (7.38)$$

По условию (7.38) u_n будет входить только в последний член разложения и тогда

$$\begin{aligned} \Phi(u^N, \tau_T) &= \Psi_{N-1} + D_n \tau_T^N, \\ \min_{\bar{u}_n \in A_n / A_{N-1}} [D_N - D_N^*] &= O(\tau_T^{N+1}). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Функциональное уравнение (7.39) и приводит к результату теоремы 1.

Теоремы 1 и 2 доказаны с использованием принципа оптимальности Беллмана [14]. Однако возможен более простой способ доказательства, который проиллюстрируем на следующей теореме.

Т е о р е м а 3. Если в экстремальной задаче

$$\begin{aligned} \Psi(\tau_T) &= \min_{u \in \bar{U}} \Phi(u, \tau_T) \\ \Phi(u, \tau_T) &> 0, \quad \tau_T \in I_T, \quad I_T \subseteq [0 \div 1), \end{aligned}$$

и существуют асимптотические разложения

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^N u_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}), \\ \Phi(u, \tau_T) &= \sum_{n=1}^N D_n(u_0, u_1, \dots, u_k) \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}), \\ \Psi &= \sum_{n=1}^N D_n^* \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}), \end{aligned}$$

причем выполняются условия

- а) $\forall n_2 > n_1, k_2 > k_1$;
- б) из последовательности $\{D_n\}$ можно выделить последовательность $\{D_{k_i}\}$, в которой каждый элемент есть выпуклая функция

u_{i-1} , а оставшиеся члены последовательности $\{D_n\}$ обладают свойством: последовательность $\{D_0, D_1, \dots, D_{k_{i-1}}\}$ при оптимальных значениях $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{k_{i-2}}^*$ не зависит от u_{i-1} , причем

в) D_1 — выпуклая функция u_0 ,

то значения $D_{k_i}^*$ определяются из соотношений:

$$\bar{D}_{k_i}^* = \min_{u_{i-1}} D_{k_i}(u_0^*, u_1^*, \dots, u_i^*, \dots), \quad (7.40)$$

$$D_{k_i} = D_n(u_0^*, u_1^*, \dots, u_i^*).$$

Доказательство. Теорема легко доказывается путем пошагового движения по интервалу τ_T .

На первом шаге зададим малое значение $\tau = \varepsilon_1$, такое, что с определенной степенью точности решения по функционалу Δ для $\Phi(u, \tau_T)$ достаточно представления

$$\Phi^1(u, \varepsilon_1) = D_1(u_0, u_1, \dots) \varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^2), \quad O(\varepsilon_1^2) \sim \Delta,$$

тогда

$$\Psi^1(\varepsilon_1) = \min_{u_0} D_1 + O(\varepsilon_1^2) \rightarrow u_0^*.$$

На втором шаге зададим значение $\tau = \varepsilon_2$, такое, при котором выполняется соотношение

$$\Phi^2(u, \varepsilon_2) = D_1(u_0, u_1, \dots) \varepsilon_2 + D_2(u_0, u_1, \dots) \varepsilon_2^2 + \\ + D_{k_2}(u_0, u_1, \dots) \varepsilon_2^{k_2} + O(\varepsilon_2^{k_2+1}), \quad O(\varepsilon_2^{k_2+1}) \sim \Delta,$$

тогда

$$\Psi^2(\varepsilon_2) = \min_{u_0, u_1} \Phi^2(u, \varepsilon_2) + O(\varepsilon_2^{k_2+1}). \quad (7.41)$$

Но на первом шаге уже определено оптимальное значение u_0^* , поэтому задачу (7.41) перепишем в виде

$$\Psi^2(\varepsilon_2) = \min_{u_1} \Phi^2(u_0^*, u_1, \dots, \varepsilon_2) + O(\varepsilon_2^{k_2+1}).$$

По свойству а) коэффициенты $D_1, D_2, \dots, D_{k_2-1}$ при оптимальном значении u_0^* не зависят от u_1 . На основании этого имеем

$$D_{k_2}^* = \min_{u_1} D_{k_2}(u_0^*, u_1^*, \dots).$$

Продолжая процесс, получаем результат теоремы.

Замечания: 1. В теоремах 1 и 2 в явном виде не используется свойство последовательности $\{D_p\} = \{D_n\} - \{D_{k_j}\}$, записанное в формулировке теоремы 3, и полагается, что возможна последовательная оптимизация каждого коэффициента D_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Но доказательства теорем 1 и 2 незначительно изменятся, если рассмотреть общий случай разложения, принятый в теореме 3.

2. Для экстремальной задачи теоремы 3 последовательности $\{D_n\}$, записанные в формулировке этой теоремы, определенным образом сужают класс общих функционалов $\Phi(u, \tau_T)$, для которых возможно применение асимптотических методов. Однако ситуация существенно улучшается при наличии дифференциальных связей. В этом случае из последовательности $\{D_0, D_1, \dots, D_{i-1}\}$ исключают u_{i-1} с помощью рекуррентных соотношений метода пространства малого времени для дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию управляемой системы.

Для интегрального общего функционала $\Phi_1(u, \tau_T)$ вектор пространства состояний входит в функцию ошибки $W(u, x, t)$, в связи с чем в теорему 1 включен в рассмотрение вектор x_0 .

Теорема 4. Если в задаче

$$\Psi(\tau_T) = \min_{u \in \bar{U}} \Phi(u, \tau_T), \quad \tau_T \in I_V, \quad I_1 \subseteq [0 \div 1]$$

существуют асимптотические разложения

$$\Psi = \Psi_N(\tau_T) + O(\tau_T^{N+1}),$$

$$\Psi_N = \min_u \Phi_N(u, \tau_T) = \sum_{n=0}^N D_n^* \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}),$$

$$\Phi_N(u, \tau_T) = \sum_{n=0}^N D_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}), \quad \inf_u D_n > -\infty,$$

то оптимальное управление u_N^* реализует соотношения

$$D_n^* = \inf_u D_n.$$

Доказательство. Пусть существует другое разложение $\tilde{\Psi}_N(\tau_T)$, реализуемое оптимальным управлением

$$\tilde{\Psi}_N(\tau_T) = \sum_{n=0}^N \tilde{D}_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}),$$

с коэффициентами $\tilde{D}_n > \inf_u D_n$; составим разность

$$\Delta\Psi = \tilde{\Psi}_N(\tau_T) - \Psi_N = \sum_n (\tilde{D}_n - D_n^*) \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}).$$

Поскольку $\tilde{D}_n > \inf_u D_n$, то $(\tilde{D}_n - D_n^*) > 0$ и, следовательно, $\Delta\Psi > 0$, что противоречит условию минимальности ($\tilde{\Psi}_N \leq \Psi_N^*$).

Равенство $\Delta\Psi = 0$ при $\tau_T \in [0 \div 1)$ достигается при $D_n = D_n^*$, и утверждение теоремы 4 доказано.

В теореме 4 полагают, что существует нижняя граница D_n по управлению u , не равная $-\infty$. В связи с этим возникает воп-

рос о существовании разложений Ψ_N , в которых $\inf_u D_n \rightarrow -\infty$, и классификации соответствующих управлений.

О п р е д е л е н и е. Если в задаче

$$\Psi = \min_u \Phi(u, \tau_T), \quad u \in \bar{U}, \quad \tau_T \in [0 \div 1]$$

функционал допускает асимптотическое разложение

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^N D_n \tau_T^n = O(\tau_T^{N+1})$$

и, начиная с некоторого номера m ,

$$\inf_u D_n \rightarrow -\infty, \quad n \geq m,$$

то в задаче

$$\Psi_N = \min_u \left[\sum_{n=0}^N D_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}) \right]$$

оптимальное управление называется асимптотическим особым управлением.

§ 7.6. Предельная корректность и асимптотические особые управления

В задачах теории оптимального управления выяснилось одно существенное обстоятельство: непосредственно на уровне математической модели не всегда удается провести анализ предельной корректности. Поясним это простым, но интересным примером.

Рассмотрим задачу выбора оптимального управления для одномерной системы:

$$\dot{x} = -Ax + u, \quad t \in I_T, \quad I_T \subseteq [t_1 \div T]; \quad (7.42)$$

$$x = x_0 \Big|_{t=t_1}, \quad u \in (-\infty \div \infty);$$

$$\Psi(x, t) = \min_{u \in U} \int_{t_1}^T W(x, u, \sigma) d\sigma.$$

Функцию ошибки зададим в двух видах:

$$W_1(x, u, \sigma) = (x^2 + \rho u^2)(1 - \tau_\sigma), \quad (7.43)$$

$$W_2(x, u, \sigma) = (x^2 + \rho_1 \tau_T u^2)(1 - \tau_\sigma), \quad (7.44)$$

$$\tau_\sigma = 1 - \exp[-q(T - \sigma)], \quad \tau_T = 1 - \exp[-q(T - t_1)].$$

Решения задачи (7.42) с функциями (7.43) и (7.44) методом динамического программирования оказываются одинаковыми, если предположить, что $\rho = \rho_1 \tau_T$. Уравнение Беллмана в этой задаче имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -x^2(1 - \tau) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{4\rho_1 \tau_T (1 - \tau)} + A \frac{\partial \Psi}{\partial x} x.$$

Постулируя решение в виде $\Psi = Bx^2$ и учитывая условие $\Psi = 0, t = T$, получаем задачу Коши для уравнения

$$\frac{dB}{dt} = (1 - \tau) - \frac{B^2}{\rho_1 \tau_T (1 - \tau)} - 2AB, \quad (7.45)$$

где

$$B = 0|_{t'=0}, \quad t' = T - t, \quad \tau = 1 - \exp(-qt).$$

Решение задачи (7.45) методом пространства малого времени следует искать в виде

$$B = B_0 + \tau_1 B_1 + \tau_1^2 B_2 + \tau_1^3 B_3 + \dots + O(\tau_1^n), \quad (7.46)$$

$$\tau_1 = 1 - \exp[-q(T - t)].$$

Решение задачи синтеза оптимального управления получается из (7.46) при $\tau_1 = \tau_T$.

Параметр B в задаче синтеза зависит от τ_T , и в задаче Коши асимптотическое решение можно записать так:

$$B = \sum_n^N \sum_p^P \tau_1^n \tau_T^p B_{np} + O(\tau_1^n \tau_T^p). \quad (7.47)$$

Для функции ошибки вида (7.43) задача разрешима в виде (7.47), а в случае (7.44) уравнение Рикатти будет иметь малый параметр при производной

$$\frac{\tau_T dB}{dt} = -(1 - \tau) \tau_T - \frac{B^2}{\rho_1 (1 - \tau)} - 2AB \tau_T,$$

который показывает, что предел $\tau_T \rightarrow 0$ не обладает корректностью.

Таким образом, в этом примере предельная некорректность предела $\tau_T \rightarrow 0$ устанавливается не на уровне модели (7.42), а на уровне задачи Коши, а также выявляется важная связь особых управлений с предельной корректностью.

При $\tau_T \rightarrow 0$ $W_2(x, u, \sigma)$ переходит в функцию ошибки особого управления

$$[W_2(x, u, \sigma) \rightarrow x^2(1 - \tau_b)]_{\tau_T \rightarrow 0},$$

и оказывается, что некорректный предел определяет особое управление.

В работе [79] для задачи типа (7.42) с функцией ошибки $W(x, u, \sigma) = x^2$ построены коэффициенты D_n , линейно-зависимые от коэффициентов асимптотического разложения управления u (см. § 7.8—7.10). Задача (7.42) с этой функцией ошибки приводит к особым управлениям в смысле принципа максимума и к асимптотическим особым управлениям.

Из приведенного выше обсуждения видна тесная связь предельной некорректности с асимптотическими особыми управлениями.

Считая связь предельной некорректности с асимптотическим особым управлением причиной — следствием, имеем утверждение: если в задаче оптимального управления реализуется асимптотическое особое управление, то эта задача имеет некорректный предел $\tau_T \rightarrow 0$.

Проблема асимптотических особых управлений возникла в связи с тем, что их выбор нельзя осуществить на основе теорем 1, 3 и 4. Как и для особых управлений в смысле принципа максимума, при изучении асимптотических особых управлений возможны два подхода:

а) регуляризация задачи и ее исследование на основе теорем 1—3;

б) самостоятельное изучение асимптотических особых управлений как специального класса управлений.

Ниже будет рассмотрен метод изучения асимптотических особых управлений как специального класса управлений.

Рассмотрим задачу построения разложения функционала как задачу аппроксимации в гильбертовом пространстве H .

Пусть G — некоторое подпространство гильбертова пространства H и пусть $\Psi(\tau_T) \in H$ не принадлежит G , а

$$\Psi^N(\tau_T) = \sum_{n=0}^N D_n^* \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}) \quad (7.48)$$

принадлежит G .

Запишем задачу аппроксимации

$$\rho^*(\Psi, \Psi^N) = \min_{\{D_n^*\}} \rho_H(\Psi, \Psi^N), \quad (7.49)$$

$$\{\Psi^N, \tau_T^n\} \in G, \quad G \subset H.$$

Если известно, что $\Psi \geq 0$, то возможна постановка задачи аппроксимации в виде

$$\rho^*(0, \Psi^N) = \min_{\{D_n^*\}} \rho_H(0, \Psi^N). \quad (7.50)$$

Задача (7.49) решается на основе соотношений

$$[(\Psi - \Psi^N), \tau_T^k]_H = 0, \quad \tau_T^k \in G. \quad (7.51)$$

Для задачи (7.50) эти соотношения имеют вид

$$[\Psi^N, \tau^k]_H = 0, \quad \tau^k \in G. \quad (7.52)$$

Здесь $[\cdot, \cdot]_H$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

Теорема 5. Если $\Psi = \text{const}$ и в разложении функционала

$$\Phi_N = \sum_{n=1}^N D_n \tau_T^N + O(\tau_T^{N+1}), \quad \inf_n D_n \in [0 \div -\infty),$$

то асимптотическое оптимальное управление реализует соотношения

$$\Psi = D_0^*, \quad D_n^* = 0. \quad (7.53)$$

Доказательство. На основе соотношения (7.51) и асимптотического разложения функционала Ψ^N имеем

$$\sum_{n=0}^N D_n^* [\tau_T^N, \tau_T^k]_H = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad D_0^* = \Psi. \quad (7.54)$$

Обозначим $[\tau_T^n, \tau_T^k]_H = u_n^k$ и положим, что u_n^k принадлежат базису некоторого банахова пространства. Как следует из свойства линейной независимости элементов базиса, равенство (7.54) возможно при $D_n^* \equiv 0$, что и приводит к утверждению теоремы 5.

Приведем простой пример на применение этой теоремы:

$$\Psi = \min_u \int_0^T u(1-u') d\sigma, \quad u' \leq 1;$$

$$u = \sum_{n=1}^N u_n \tau_T^n + O(\tau_T^{N+1}).$$

В результате вычислений имеем:

$$D_1 = \frac{u_0}{q} - u_0 \mu_1,$$

$$D_2 = \frac{u_1 + u_0}{2q} - \frac{u_1^2}{2} - u_0 \mu_2,$$

$$D_3 = \frac{u_2 + u_1 + u_0}{3q} - (u_2 \mu_1 + u_0 \mu_3),$$

$$D_4 = \frac{u_3 + u_2 + u_1 + u_0}{4q} - \left(u_0 \mu_1 + u_3 \mu_1 + \frac{u_2^2}{2} \right).$$

Согласно теореме 5, $D_n^* = 0$, откуда

$$u_1 = 1/q, \quad u_2 = 1/2q, \quad u_3 = 1/3q, \quad u_4 = 1/4q;$$

$$u = u_0 + \frac{1}{q} \left[\tau + \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{1}{3} \tau^3 + \frac{1}{4} \tau^4 \right] + O(\tau^5).$$

Если продолжить вычисления, то можно просуммировать ряд и получить

$$u = u_0 - \frac{1}{q} \ln(1 - \tau) = u_0 + t.$$

В этом примере на основе теоремы 5 восстанавливается точный результат ($u' = 1$). Однако полностью она не решает вопрос о вычислении асимптотических особых управлений, так как ее результаты справедливы только для случая

$$\Psi = \text{const}, \quad \inf_u D_n \rightarrow -\infty, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

В более общих случаях, когда не выполняются условия теоремы 5, асимптотические особые управления следует изучать на основе задачи (7.51).

Отметим, что если в задаче (7.49) минимизацию осуществить не по $\{D_n^*\}$, а по $\{\bar{u}_n\}$, то соответствующий формализм будет воспроизводить формализм метода Ритца.

§ 7.7. Асимптотический принцип оптимальности и необходимые условия экстремума

Основные результаты асимптотического принципа оптимальности достаточно хорошо интерпретируются с позиций необходимого условия экстремума. Для того чтобы общий функционал $\Phi(u, \tau_T)$ при $u = u^*$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его дифференциал (если он существует) обращался в нуль:

$$\delta\Phi(u, \tau_T) = 0 \quad \text{при } u = u^*.$$

В условиях теоремы 3 применим это условие к общему функционалу, записанному в виде асимптотического разложения. Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial u_p} \left[\sum_{n=1}^N D_n(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_n) \tau_T^N + O(\tau_T^{N+1}) \right] = 0, \quad p = 0, \dots, N$$

или

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial u_p} D_n(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_n) \tau_T^n = 0.$$

Если рассматривать $\{\tau_T^p\}$ в качестве линейно-независимых элементов некоторого линейного нормированного пространства,

то в силу свойства линейной независимости степеней τ имеем [6] ряд независимых уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u_p} D_n(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_k) = 0, \quad p = 0 \dots \quad (7.55)$$

Последовательность уравнений (7.55) можно рассматривать в прямом (от $p=0, 1, \dots; p$) или обратном ($p=p, p-1, \dots, 0$) движении.

Разберем прямое движение. Для $n=1$ и $p=0$ имеем $\partial D_0(\bar{u}_0)/\partial \bar{u}_0 = 0$. Это уравнение совпадает с первым уравнением (7.40).

Принимая $n=n_1, p=1$, имеем $\partial D_k/\partial \bar{u}_1 = 0$, совпадающее со вторым уравнением (7.40). Продолжая этот процесс, из (7.55) можно выделить всю совокупность уравнений (7.40).

Отметим, что (7.55) содержат ряд дополнительных уравнений (нетривиальных), не охватываемых системой (7.40), анализ которых будет полезным с точки зрения изучения свойств общего функционала.

§ 7.8. Простейшие примеры

Рассмотрим несколько примеров на применение приведенных выше теорем.

Пример 1:

$$\Psi = \min_u \int_0^T uu' d\sigma,$$

$$u_{t=0} = d_0, \quad u_{t=T} = d_1, \quad \{d_0, d_1\} > 0.$$

Для этой задачи нельзя составить уравнение Эйлера, но она легко решается асимптотическим методом.

Будем искать управление в виде

$$u = a_0 + \tau a_1 + \tau^2 a_2 + \dots + O(\tau^N).$$

Прямое вычисление дает

$$D_1 = a_0 a_1, \quad D_2 = \frac{a_1^2}{2} + a_0 a_2,$$

$$D_3 = a_2 a_1 + a_0 a_3, \quad D_4 = a_0 a_4 + a_3 a_1 + \frac{a_2^2}{2}.$$

В этом случае управление u можно рассматривать как особое и на основе теоремы 3 имеем $D_n^* \equiv 0$. По условию на конце

$$t = 0, \quad a_0 = d_0,$$

$$D_1^* = 0, \quad \rightarrow a_1 = 0,$$

$$D_n^* = 0, \quad \rightarrow a_n = 0.$$

Таким образом, $u = d_0 + O(\tau^N)$.

Возьмем управление в виде

$$u = d_0 + a_n \tau^n,$$

тогда

$$a_n = (d_1 - d_0)/\tau_T^n, \quad \Psi = d_0(d_1 - d_0) + O(\tau_T^n).$$

Следовательно,

$$\Psi \rightarrow d_0(d_1 - d_0), \quad n \rightarrow \infty,$$

а асимптотическое оптимальное управление будет

$$u = d_0 + \frac{(d_1 - d_0)}{\tau_T^n} \tau^n + O(\tau^{n+1}).$$

Рассматривая $n \rightarrow \infty$, получаем оптимальное управление

$$u = \begin{cases} d_0, & \tau \in [0 \div \tau_T); \\ d_1, & \tau = \tau_T. \end{cases}$$

Пример 2:

$$\Psi = \min_u \int_0^T u(1 - u') d\sigma, \quad u' \leq 1.$$

В результате вычислений имеем:

$$D_1 = \frac{a_0}{q} - a_0 a_1,$$

$$D_2 = \frac{a_1 + a_0}{2q} - \frac{a_1^2}{2} - a_0 a_2,$$

$$D_3 = \frac{a_2 + a_1 + a_0}{3q} - (a_2 a_1 + a_0 a_3),$$

$$D_4 = \frac{a_3 + a_2 + a_1 + a_0}{4q} - \left(a_0 a_1 + a_3 a_1 + \frac{a_2^2}{2} \right).$$

Определяя оптимальные значения D_n^* из условия теоремы $D_n^* \equiv 0$, получаем:

$$a_1 = \frac{1}{q}, \quad a_2 = \frac{1}{2q}, \quad a_3 = \frac{1}{3q}, \quad a_4 = \frac{1}{4q};$$

$$a = a_0 + \frac{1}{q} \left[\tau + \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{1}{3} \tau^3 + \frac{1}{4} \tau^4 \right] + O(\tau^5).$$

Сумма этого ряда равна

$$u = a_0 - \frac{1}{q} \ln(1 - \tau) = a_0 + t.$$

Здесь на основе асимптотического принципа оптимальности восстанавливается точный результат.

Пример 3:

$$\Psi = \min_u \int_0^1 u(1-u')^2 d\sigma.$$

Коэффициенты D_n :

$$D_1 = \frac{a_0}{q} - 2a_0a_1 + qa_0a_1^2,$$

$$D_2 = \frac{a_0 + a_1}{q} - 2(a_1^2 + 2a_0a_2) + q(a_1^3 + 4a_0a_1a_2 - a_0a_1^2),$$

$$D_1^* = \min_{a_1} D_1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{q},$$

$$D_2 \equiv 0 \text{ при } a_1 = \frac{1}{q}.$$

В этом примере существует непрерывное управление при

$$u_1|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=T} = 1.$$

Наши вычисления дают

$$u = \frac{1}{q}\tau + O(\tau^2),$$

и при $q \rightarrow 0$ получаем точное значение $u = t$.

§ 7.9. Выделение линейно-независимых элементов из набора u_{np} ¹

Ранее (см. § 7.4—7.7) был принят постулат о том, что в наборе u_{np} линейно независим только набор u_{op} . Покажем, что этот постулат оказывается действительно справедливым.

Вначале сделаем это для управления как некоторой произвольной функции, для которой известно ее разложение в малом времени, затем покажем, каким образом использовать линейно-независимые элементы u_{op} для построения программного управления в реальных задачах.

1. При оптимизации управляемой системы на основе принципа оптимальности Беллмана решение было получено сначала в обратном времени $\tau, \tau_1 = 1 - \exp[-q(T-t)]$, затем в прямом $\tau = 1 - \exp(-qt)$. В частности, управление было найдено в виде

$$u = \sum_{n=0} u_n \tau^n.$$

¹ Этот параграф написан совместно с В. И. Нещеретом.

В обратном времени ему соответствует разложение

$$u = \sum_{n=0} \bar{u}_n \tau_1^n. \quad (7.56)$$

Очевидно, что в каждый момент времени t при соответствующих ему значениях τ и τ_1 справедливо равенство

$$\sum_{n=0} u_n \tau^n = \sum_{n=0} \bar{u}_n \tau_1^n.$$

Всегда имеет место зависимость $\tau_1 = \varphi(\tau, \tau_T)$, конкретный вид которой определяется видом отображения $\tau = f(t)$. При той форме перехода в малое время, которая принята в методе пространства малого времени,

$$\tau_1 = (\tau_T - \tau)/(1 - \tau). \quad (7.57)$$

Поэтому

$$\sum_{n=0} u_n \tau^n = \sum_{n=0} \bar{u}_n \left(\frac{\tau_T - \tau}{1 - \tau} \right)^n, \quad (7.58)$$

откуда можно получить связь между коэффициентами «прямого» и «обратного» разложений.

Прежде чем сделать это в общем виде, продемонстрируем процедуру и получим основные результаты на примере небольшого конечного числа приближений

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 \tau + u_2 \tau^2 + u_3 \tau^3 + u_4 \tau^4 &= \bar{u}_0 + \bar{u}_1 \frac{\tau_T - \tau}{1 - \tau} + \\ &+ \bar{u}_2 \left(\frac{\tau_T - \tau}{1 - \tau} \right)^2 + \bar{u}_3 \left(\frac{\tau_T - \tau}{1 - \tau} \right)^3 + \bar{u}_4 \left(\frac{\tau_T - \tau}{1 - \tau} \right)^4. \end{aligned}$$

Приведя выражения к общему знаменателю и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ , получим:

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u}_0 + \bar{u}_1 \tau_T + \bar{u}_2 \tau_T^2 + \bar{u}_3 \tau_T^3 + \bar{u}_4 \tau_T^4, \\ u_1 &= -\bar{u}_1 + (\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2) \tau_T + (2\bar{u}_2 - 3\bar{u}_3) \tau_T^2 + (3\bar{u}_3 - 4\bar{u}_4) \tau_T^3, \\ u_2 &= -\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + (\bar{u}_1 - 4\bar{u}_2 + 3\bar{u}_3) \tau_T + (3\bar{u}_2 - 9\bar{u}_3 + 6\bar{u}_4) \tau_T^2, \\ u_3 &= -\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 - \bar{u}_3 + (\bar{u}_1 - 6\bar{u}_2 + 9\bar{u}_3) \tau_T. \end{aligned}$$

Видно, что коэффициенты «прямого» разложения представлены рядами по степеням параметра τ_T [74]

$$u_n = \sum_{k=0} u_{nk} \tau_T^k, \quad (7.59)$$

коэффициенты которых u_{np} являются линейными комбинациями коэффициентов $u_{0n} = \bar{u}_n$:

$$\begin{aligned} u_{10} &= -u_{01}, & u_{20} &= -u_{01} + u_{02}, \\ u_{11} &= u_{01} - 2u_{02}, & u_{21} &= u_{01} - 4u_{02} + 3u_{03}, \\ u_{12} &= 2u_{02} - 3u_{03}, & u_{22} &= 3u_{02} - 9u_{03} + 6u_{04}, \\ u_{13} &= 3u_{03} - 4u_{04}, & u_{30} &= -u_{01} + 2u_{02} - u_{03}, \\ & & u_{31} &= -u_{01} - 6u_{02} + 9u_{03} - 4u_{04}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Можно записать

$$u_{pk} = \sum_n R_{pk}^n u_{0n}.$$

Чтобы установить эту зависимость в общем виде и получить формулу для коэффициентов R_{pk}^n , следует записать тождество (7.58) с учетом разложения (7.59)

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{pk} \tau_T^k \tau^p = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_T - \tau)^n \left(\frac{1}{1-\tau} \right)^n,$$

где

$$(\tau_T - \tau)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_j^n \tau_T^{n-j} \tau^j,$$

C_j^n — биномиальный коэффициент.

С помощью известной формулы [24] нетрудно получить

$$\left(\frac{1}{1-\tau} \right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \tau^i.$$

В итоге

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{pk} \tau_T^k \tau^p = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0n} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n+i-1)! (-1)^j C_j^n}{(n-1)! i!} \tau_T^{n-j} \tau^{i+j}. \quad (7.61)$$

Обозначим $n-j=k$, $i+j=p$. Тогда $n \geq k$, но $n \leq p+k$. Это видно также из выражений (7.60). Следовательно [105],

$$u_{pk} = \sum_{n=p}^{p+k} R_{pk}^n u_{0n}, \quad (7.62)$$

где

$$R_{pk}^n = \frac{(n+i-1)! (-1)^j n}{i! j! (n-j)!}.$$

Итак, коэффициенты u_{0n} однозначно определяют управление на интервале $[0, T]$. Это становится очевидным, если вспомнить, что они являются коэффициентами разложения в обратном вре-

Таблица 7.1

p	k					
	0	1	2	3	4	5
$n = 1$						
0	0	1				
1	-1	1				
2	-1	1				
3	-1	1				
4	-1	1				
5	-1	1				
$n = 2$						
0			1			
1		-2	2			
2	1	-4	3			
3	2	-6	4			
4	3	-8	5			
5	4	-10	6			
$n = 3$						
0				1		
1			-3	3		
2		3	-9	6		
3	-1	9	-18	10		
4	-3	18	-30	15		
5	-6	30	-45	21		
$n = 4$						
0					1	
1				-4	4	
2			6	-16	10	
3		-4	24	-40	20	
4	1	-16	60	-80	35	
5	4	-40	120	-140	56	
$n = 5$						
0						1
1					-5	5
2				10	-25	15
3			-10	50	-75	35
4		5	-50	150	-175	70
5	-1	25	-150	350	-350	126

мени. В частности, u_{00} есть значение управления на правом конце интервала.

Для удобства пользования в конкретных вычислениях значения R_{pk}^n представлены в табл. 7.1.

Заметим, что основной результат о линейной зависимости u_{pk} от u_{0n} справедлив для любой формы перехода в пространстве малого времени. Используемая нами зависимость $\tau = 1 - e^{-at}$ дает наиболее простые результаты. Сложность формул в методе функциональных параметров возрастает с ростом степени ряда $\frac{d\tau}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n$. При нашем отображении $d\tau/dt = q(1-\tau)$.

В остальных случаях эта производная имеет более высокую степень. Например, при $\tau = (e^{qt} - 1)/(e^{qt} + 1)$

$$d\tau/dt = 1/2q(1 - \tau^2), \quad \tau_1 = (\tau_T - \tau)/(1 - \tau_T\tau).$$

Здесь можно использовать приведенные выкладки, справедлива даже формула для R^n с той только разницей, что теперь

$$n - j + i = k, \quad i + j = p.$$

Для других отображений ситуация значительно усложняется.

Таким образом, если функция имеет обратное разложение $u = \sum_n \bar{u}_n \tau_1^n$, то она может быть представлена двойным разло-

жением (7.61), коэффициенты которого u_{pk} однозначно определяются коэффициентами \bar{u}_n по формуле перехода (7.62).

2. Однако мы не можем утверждать в конкретной задаче, что формально найденные коэффициенты u_{0n} являются коэффициентами \bar{u}_n обратного разложения, и, следовательно, использовать формулу (7.62). В задачах оптимального управления, решаемых асимптотическими методами, этот вопрос имеет четкую физическую трактовку.

Запишем функциональные параметры:

$$\tau = 1 - \exp[-q(t - t_1)], \quad \tau_1 = 1 - \exp[-q(T - t)],$$

$$\tau_T = 1 - \exp[-q(T - t_1)].$$

Здесь t_1 — произвольный момент времени, с которого производится отсчет времени, т. е. $t \in [t_1, T]$.

Если решением задачи является программное управление, то оно зависит от длительности процесса $T - t_1$ и текущего времени t :

$$u(T - t_1, t) = \sum_p \sum_k u_{pk} \tau^p \tau_T^k. \quad (7.63)$$

Управление, полученное в форме синтеза, есть функция $T - t$ и текущего значения фазовых координат x

$$u(T - t, x) = \sum_n u_{0n}^*(x) \tau_1^n. \quad (7.64)$$

Например, в таком виде получен синтез оптимального управления на основе принципа оптимальности Беллмана [73, 104] (см. § 7.3).

При $t = t_1$

$$u_0(T - t_1, x_0) = \sum_n u_{0n}^*(x_0) \tau_T^n.$$

В работах [74, 78, 105] синтез записан в форме

$$u_0(T - t, x_{00}) = \sum_n u_{0n} \tau_T^n. \quad (7.65)$$

Это справедливо при $t=t_1$, т. е. в произвольный момент времени. Коэффициенты u_{0n} получены в зависимости от значения x в этот момент, т. е. от x_{00} .

При значениях x в некоторый другой момент t очевидно

$$u(T-t, x) = \sum_n u_{0n}^t \tau_1^n, \quad (7.66)$$

где u_{0n}^t зависит от x . Коэффициенты u_{0n}^t в (7.66) те же, что u_{0n}^0 в формуле (7.64), и равны $\bar{u}_n = -\frac{c}{2\varphi} \bar{a}_n x$ в формуле $u = \sum_{n=0} \bar{u}_n \tau_1^n$ (см. § 7.3).

Таким образом, коэффициенты u_{0n}^t , зависящие от текущего значения x , являются в этом смысле функциями времени.

Обычно текущие значения x нам неизвестны. Поэтому ставится задача: получить u_{0n}^t от исходных данных $x(0) = x_0$ и построить соответствующие формулы перехода для того, чтобы можно было перейти от синтеза к программному управлению, т. е. найти последнее как явную функцию времени.

Представим функцию u_{0n}^t рядом Тейлора, опуская в дальнейшем верхний индекс t :

$$u_{0n}(x) = u_{0n}^0(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial u_{0n}(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u_{0n}(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} + \dots$$

При $x=x_0$ для всех производных справедливы соотношения, аналогичные следующему:

$$\left. \frac{\partial u_{0n}(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \frac{\partial u_{0n}^0(x_0)}{\partial x_0}.$$

Итак,

$$u_{0n} = u_{0n}^0 + (x - x_0) \frac{\partial u_{0n}^0}{\partial x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{0n}^0}{\partial x_0^2} + \dots \quad (7.67)$$

Рассмотрим тождество

$$\sum_p \sum_k u_{pk} \tau^p \tau_T^k = \sum_n u_{0n} \tau_1^n \quad (7.68)$$

с учетом соотношений (7.63), (7.66), (7.67). Коэффициенты в разложении (7.67) обозначим

$$B_m(\tau, \tau_T) = \frac{(x - x_0)^m}{m!} = \frac{1}{m!} \left(\sum_{p=1} \sum_{k=0} x_{pk} \tau^p \tau_T^k \right)^m.$$

Теперь

$$\sum_{p=0} \sum_{k=0} u_{pk} \tau^p \tau_T^k = \sum_{n=0} \sum_{m=0} B_m(\tau, \tau_T) \frac{\partial^m u_{0n}^0}{\partial x_0^m} \left(\frac{\tau_T - \tau}{1 - \tau} \right)^n. \quad (7.69)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ и τ_T , как это было сделано ранее, получаем искомую зависимость u_{pk} и u_{0n}^0 . Коэффициенты u_{pk} удобно записать таким образом:

$$u_{pk} = u_{pk}^0(u_{0n}^0) + u'_{pk} \left(\frac{\partial u_{0n}^0}{\partial x_0} \right) + u''_{pk} \left(\frac{\partial^2 u_{0n}^0}{\partial x_0^2} \right) + \dots \quad (7.70)$$

Здесь каждый член определяется соответствующим членом тейлоровского разложения (7.67) и может быть рассмотрен отдельно.

Если все производные $\partial^m u_{0n}^0 / \partial x_0^m$, $m \geq 1$ равны нулю, то управление состоит только из нулевого члена u_{pk}^0 , который, как нетрудно видеть, определится формулами, полностью совпадающими с (7.62).

Более интересна составляющая u'_{pk} . В работах [74, 78, 105] были получены формулы для u_{0n}^0 , в которые x входит линейно. В этом случае управление определяется двумя членами выражения (7.70), поэтому покажем подробно вид нескольких первых коэффициентов u_{pk} :

$$\begin{aligned} u'_{1k} &= \gamma_0' x_{1k} + \gamma_1' x_{1,k-1} + \gamma_2' x_{1,k-2} + \dots + \gamma_k' x_{10}, \\ u'_{2k} &= \gamma_0' x_{2k} + \gamma_1' (x_{2,k-1} + x_{1,k-1} - x_{1k}) + \gamma_2' (x_{2,k-2} + 2x_{1,k-2} - 2x_{1,k-1}) + \\ &\quad + \gamma_3' (x_{2,k-3} + 3x_{1,k-3} - 3x_{1,k-2}) + \dots, \\ u'_{3k} &= \gamma_0' x_{3k} + \gamma_1' (x_{3,k-1} + x_{2,k-1} + x_{1,k-1} - x_{2k} - x_{1k}) + \\ &\quad + \gamma_2' (x_{3,k-2} + 2x_{2,k-2} + 3x_{1,k-2} - 2x_{2,k-1} - 2x_{1,k-1} + x_{1k}) + \\ &\quad + \gamma_3' (x_{3,k-3} + 3x_{2,k-3} + 6x_{1,k-3} - 3x_{2,k-2} - 9x_{1,k-2} + \\ &\quad + 3x_{1,k-1}) + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_n^m = \frac{\partial^m u_{0n}^0}{\partial x_0^m}.$$

Структура коэффициентов u''_{pk} , u'''_{pk} , ... во многом аналогична.

Приведем теперь общие выражения для нескольких составляющих коэффициента u_{pk} (7.70):

$$\begin{aligned} u_{pk}^0 &= \sum_{n=k}^{p+k} R_{pk}^n u_{0n}^0, \quad p = z + j, \quad k = n - j; \\ u'_{pk} &= \gamma_0' x_{pk} + \sum_{n=1}^{\mu} \gamma_n' \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{p-1-j} R_{r+j,n-j}^n x_{p-r-j,k-n+j}, \quad p = 1, 2, 3, \dots; \\ u''_{pk} &= \sum_{s_1=1}^{p-1} \sum_{i=0}^k \gamma_0'' x_{s_1 i} x_{p-s_1, k-i} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\mu} \gamma_n'' \sum_{s_1=1}^{p-1} \sum_{i_1=0}^k \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{p-1-j} R_{r+j, n-j}^n X_{s_1 i_1} X_{p-s_1-r-j, k-i_1-n+j},$$

$$p = 2, 3, 4, \dots, s_1 \leq p - r - j - 1, i_1 \leq k - n + j;$$

$$u_{pk}''' = \sum_{s_2=1}^{p-r} \sum_{i_2=0}^k \sum_{s_1=1}^{p-1-s_2} \sum_{i_1=0}^{k-i_2} \gamma_0''' X_{s_2 i_2} X_{p-s_2-s_1, k-i_2-i_1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\mu} \gamma_n'' \sum_{s_2=1}^{p-2} \sum_{i_2=0}^k \sum_{s_1=1}^{p-1-s_2} \sum_{i_1=0}^{k-i_2} \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{p-1-j} R_{r+j, n-j}^n X_{p-s_2-s_1-r-j, k-i_1-i_2-n+j} X_{s_1 i_1} X_{s_2 i_2},$$

$$p = 3, 4, 5, \dots, s_2 \leq p - s_1 - r - j - 1, i_2 \leq k - i_1 - n + j.$$

Как видно из приведенных формул, нелинейные члены зависимости $u_{0n}(x_0)$ оказывают влияние не на все коэффициенты u_{pk} (также u_n). Например, u_{1k} не зависит от $\partial^m u_{0n} / \partial x_0^m$ при $m \geq 2$. Для наглядности это можно показать в такой форме:

$$u_{1k} = u_{1k}^0 + u'_{1k},$$

$$u_{2k} = u_{2k}^0 + u'_{2k} + u''_{2k},$$

.....

$$u_{pk} = u_{pk}^0 + u'_{pk} + u''_{pk} + \dots + u_{pk}^p.$$

В заключение еще раз подчеркнем двоякий смысл величины x_{00} . В рекуррентных формулах для x_{np} , x_{00} есть x_0 , так как все $x_{0n} = 0$, например в линейной системе $\dot{x} = Ax + Cu$ $x_{10} = Ax_0/q$. Однако если в результате решения задачи синтеза получаем $u_{0n} = f(x_{00})$, то это выражение справедливо в произвольный момент времени и x_{00} выступает в роли текущего значения x . Во всяком случае именно в таком смысле следует понимать x_{00} при переходе к программному управлению.

§ 7.10. Синтез оптимальных управлений в линейной системе на основе асимптотического принципа оптимальности

Пусть мы имеем систему уравнений, описывающих возмущенное движение объекта, относительно программной траектории:

$$\dot{x} = Ax + Cu, \quad t \in I_T, \quad I_T \subseteq [t_1 \div T];$$

(7.71)

$$x = x_0 |_{t=t_1}, \quad x \in E(I_T) \cup \bar{U}.$$

Здесь x — N -мерный вектор отклонения от программного движения; u — управление; A — матрица $[N \times N]$; C — вектор-столбец $[N \times 1]$.

Пусть задан критерий качества:

$$\Psi(x, t_1) = \min_{u \in \bar{U}} \int_{t_1}^T \chi(\sigma) W(x, u, \sigma) d\sigma,$$

$$W(x, u, \sigma) \in C(E \times I_T \times \bar{U}),$$

где $W(x, u, \sigma)$ — функция ошибки системы, $\chi(\sigma)$ — некоторая функция времени.

Необходимо определить такую функцию $u(x) \in \bar{U}$, которая любому допустимому значению вектора x ставит в соответствии управление u , минимизирующее критерий качества на траекториях системы (7.71).

Применим к решению поставленной задачи асимптотический метод. Для этого введем малое время τ и τ_T с помощью преобразований:

$$\tau = 1 - \exp[-q(t - t_1)], \quad \tau_T = 1 - \exp[-q(T - t_1)],$$

$$\{\tau; \tau_T\} \leq 1.$$

Запишем задачу в пространстве малого времени:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} (1 - \tau) = \frac{1}{q} (Ax + Cu), \quad (7.72)$$

$$x = x_0|_{\tau=0}, \quad \Psi(x, \tau_T) = \min_{u \in \bar{U}} \int_0^{\tau_T} W(x, u, \tau_\sigma) d\tau_\sigma.$$

Функция χ выбрана в виде

$$\chi(\sigma) = q(1 - \tau_\sigma), \quad \tau_\sigma = 1 - e^{-q\sigma}.$$

Вектор x и скаляр u представимы в виде асимптотических разложений:

$$x = \sum_{n=0}^L \tau^n x_n + O(\tau^{L+1}), \quad (7.73)$$

$$u = \sum_{n=0}^L \tau^n u_n + O(\tau^{L+1}).$$

Подставив эти разложения в (7.72) для определения векторов x_n , получим рекуррентную формулу

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{nq} (Ax_{n-1} + Cu_{n-1}).$$

Используя эту формулу и разложения (7.73), функционал можно представить в виде

$$\int_0^{\tau_T} W(x, u, \tau_\sigma) d\tau_\sigma = \sum_{n=0}^L \tau_T^n D_n + O(\tau_T^{L+1}), \quad (7.74)$$

где D_n — функция коэффициентов u_n и вектора x_n .

Теперь минимизируемый функционал превратился в функцию конечного числа переменных и задача определения функции $u(x)$ становится задачей отыскания коэффициентов u_n из условия минимума выражения (7.74).

Для определения коэффициентов u_n воспользуемся асимптотическим принципом оптимальности, согласно которому разложение для $\Psi(x, \tau_T)$ в нашей задаче будет

$$\Psi(x, \tau_T) = \sum_{n=0}^L \tau_T^n D_n^* + O(\tau_T^{L+1}),$$

где

$$D_n^* = \min D_n, \quad u_i \in A_n \setminus A_{n-1}, \quad (7.75)$$

A_n — множество элементов u_i ($i=0, 1, 2, \dots$).

Используя соотношение (7.75), можно построить процедуру последовательного определения коэффициентов u_n . Затем, полагая

$$u^0 = u_0; \quad u^1 = u_0^0 + \tau u_1; \quad \dots; \quad u^n = u_{n-1}^n + \tau^n u_n,$$

получим последовательность $\{u_n^n\}$, которая при $n \rightarrow \infty$ сходится к u_{opt} , а значение критерия качества на этой последовательности стремится к своему нижнему пределу.

Покажем асимптотическую сходимость значения критерия качества к своему нижнему пределу. Введем обозначения: $u^L =$

$= \sum_{i=0}^L \tau_T^i u_i$ — оптимальное уравнение L -го приближения; Ψ^L — значение критерия качества при оптимальном управлении L -го приближения.

Пользуясь асимптотическим принципом оптимальности, можно написать

$$\Psi^L = \sum_{i=0}^L \tau_T^i \min_{u_i} D_i + \tau_T^{n+1} D_{n+1} + \dots + \tau_T^L D_L.$$

Рассмотрим разность значений критерия качества при оптимальном управлении n и $n+1$ -приближения

$$\Psi^n - \Psi^{n+1} = \delta_n.$$

Для δ_n справедливо соотношение $\delta_n \sim O(\tau_T^{n+1})$. Тогда при $\tau_T < 1$ получим

$$\delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, последовательность $\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n, \dots$ асимптотически сходится к своему нижнему пределу.

В случае квадратичного функционала коэффициенты D_n являются квадратичными функциями \bar{u}_n , и тогда можно показать, что условия минимума функционала, полученные с использованием асимптотического принципа оптимальности, совпадают с условиями минимума функции многих переменных.

Рассмотрим построение алгоритма синтеза оптимальных управлений на примере задачи стабилизации с функцией ошибки

$$W(x, u, \sigma) = (1 - \sigma) (\|x\|^2 + \rho u^2).$$

Представим вектор x и скаляр u в виде разложений (7.73). В свою очередь векторы x_n и коэффициенты u_n могут быть представлены в виде разложений:

$$x_n = \sum_{p=0}^L \tau_T^p x_{np} + O(\tau_T^{L+1}), \quad u_n = \sum_{p=0}^L \tau_T^p u_{np} + O(\tau_T^{L+1}),$$

где $u_{0n} = \bar{u}_n$.

Тогда разложение $\Psi(x, \tau_T)$ будет иметь вид

$$\Psi(x, \tau_T) = \min_{\bar{u}_l} \sum_{n=0}^L \sum_{p=0}^n \sum_k \sum_s \tau_T^{k+s+n+1} \frac{[x_{pk} \cdot x_{n-p,s}] + \rho u_{pk} \cdot u_{n-p,s}}{(n+1)}$$

и коэффициенты

$$D_g^* = \min_{\bar{u}_l} \sum_n \sum_{p=0}^n \sum_k \sum_s \frac{[x_{pk} \cdot x_{n-p,s}] + \rho u_{pk} \cdot u_{n-p,s}}{(n+1)},$$

где $g = n + k + s + 1$; $[x_{pk} \cdot x_{n-p,s}]$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве.

При построении коэффициентов D_g^* необходимо учитывать линейную зависимость коэффициентов u_{pn} (см. § 7.9).

Линейная зависимость позволяет существенно уменьшить количество вычислений и необходимый объем оперативной памяти ЭВМ, так как для решения задачи достаточно определить коэффициенты u_{0n} . Важно также заметить, что, решив задачу определения коэффициентов u_{0n} , мы одновременно решим задачу синтеза управления по принципу обратной связи, которому соответствует управление $u = u_0$, и задачу определения программного управления, которому соответствует все разложение (7.73).

Описанный выше алгоритм был реализован на ЭВМ БЭСМ-4, причем процедуру определения коэффициентов u_{0n} удалось провести в символическом виде. В результате были получены выражения для коэффициентов в виде зависимостей от x .

Приведем выражения для нескольких u_{0n} :

$$u_{00} = 0, \quad u_{01} = \frac{Cx_{00}}{\rho q}, \quad u_{02} = -\frac{3}{4} \frac{(A \cdot x_{00})C}{\rho q^2} - \frac{1}{2} \frac{(A \cdot C)x_{00}}{\rho q^2},$$

$$\begin{aligned}
u_{03} &= 0,8333u_{02} - 0,0283 \frac{C(A \cdot x_{00})}{\rho q^2} - 0,0283 \frac{(A(A \cdot x_{00}))C}{\rho q^3} - \\
&- 0,5333 \frac{C}{\rho q^2} u_{01} - 0,0666 \frac{x_{00}C}{\rho q} - 0,5833 \frac{x_{00}(A \cdot C)}{\rho q^2} - \\
&- 0,0166 \frac{x_{00}(A \cdot A)C}{\rho q^3} - 0,6 \frac{(A \cdot x_{00})}{\rho q^2} - 0,4165 \frac{(A \cdot x_{00})(A \cdot C)}{\rho q^3}, \\
u_{04} &= -0,6246u_{01} - 0,7497u_{02} - 0,8748u_{03} - 0,0386 \frac{C(A \cdot x_{00})}{\rho q^2} - \\
&- 0,4612 \frac{C(A \cdot A \cdot x_0)}{\rho q^3} - 0,0074 \frac{C(A \cdot A)(A \cdot x_{00})}{\rho q^4} - \\
&- 0,7232 \frac{C^2}{\rho q^2} u_{01} - 0,0220 \frac{C(A \cdot C)}{\rho q^3} u_{01} - 0,0416 \frac{C \cdot C}{\rho q^2} u_{02} - \\
&- 0,2797 \frac{(A \cdot C)C}{\rho q^3} u_{01} - 0,6246 \frac{x_{00} \cdot C}{\rho q} - 0,6041 \frac{x_{00}(A \cdot C)}{\rho q^2}.
\end{aligned}$$

Возможность определения коэффициентов в виде явных зависимостей от x позволила получить решение задачи синтеза в замкнутом виде.

В связи с тем, что описанный метод является приближенным, приобретает интерес сопоставление управлений, синтезированных различными методами. Был проведен синтез оптимальных управлений методом динамического программирования и на основе асимптотического принципа оптимальности. Затем для совокупности исходных данных, выбираемых из последовательности случайных чисел, сравнивались значения критерия оптимальности для управлений, синтезированных первым и вторым методами. При решении задачи синтеза методом динамического программирования был использован алгоритм, построенный на основе асимптотического метода пространства малого времени. Такой алгоритм оказался эффективным в вычислительном отношении и позволил решить задачу синтеза методом динамического программирования на ЭВМ среднего класса для систем до 15 порядка.

Пример 1. Рассмотрим задачу синтеза оптимальной стабилизации самолета на заданной высоте. Система уравнений, описывающая движение объекта, имеет вид:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + C_1u, \quad \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + C_2u, \quad \dot{x}_3 = x_1.$$

Значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 0,04; & A_{12} &= 0,8; & A_{21} &= 0,056; & C_1 &= -0,46; \\
C_2 &= 0,03.
\end{aligned}$$

Критерий оптимальности

$$\Psi(x, t_1) = \min_u \int_{t_1}^T (1 - \tau) (\|x\|^2 + \rho u^2) d\sigma.$$

При асимптотическом синтезе определялось 10 коэффициентов u_{0n} , остальные u_{0n} ($n \geq 10$) полагались равными нулю. Число членов разложения функционала $L = 20$.

В табл. 7.2 приведены значения критерия оптимальности для управлений, синтезированных методом динамического программирования и на основе асимптотического принципа оптимальности, для нескольких значений x .

Таблица 7.2

x_0	Ψ_a	Ψ_b	$\Psi_a - \Psi_b$
0,30421	0,12525	0,12494	0,03
0,73994	0,74162	0,73921	0,00241
0,53944	0,39392	0,32287	0,00105
0,91414	1,12941	1,12821	0,0012

Примечание. Ψ_a , Ψ_b — значения критерия оптимальности для управления, синтезированного соответственно асимптотическим методом и методом динамического программирования.

Относительная средняя погрешность асимптотического синтеза рассматриваемой системы для достаточно большого количества значений x_0 получилась равной 0,3%.

Ниже приведены значения коэффициентов u_{0n} , полученные при синтезе, для $x_0 = 0,30421$ и $\rho = 0,02$:

$$u_{01} = 1,3081, \quad u_{02} = 0,1313, \quad u_{03} = -0,09856,$$

$$u_{04} = -0,05631, \quad u_{05} = -0,0254, \quad u_{06} = -0,0124.$$

Видно, что коэффициенты u_{0n} быстро убывают по абсолютной величине с увеличением номера n .

Представляет интерес прямое сопоставление коэффициентов u_{0n} , полученных из решения уравнения Беллмана и с использованием асимптотического принципа оптимальности. Для функции ошибки $W = \|x\|^2 + \rho u^2$ из решения уравнения Беллмана имеем

$$u_{00} = 0, \quad u_{01} = -\frac{Cx_{00}}{\rho q}, \quad u_{02} = -\frac{ACx_{00}}{\rho q^2}.$$

Применение асимптотического принципа оптимальности дает тот же результат. Таким образом, первые три коэффициента полностью совпадают.

Рассмотрим вопрос о методах построения процедуры минимизации коэффициентов D_n . Как отмечалось выше, для квадратичного функционала коэффициенты D_n являются квадратичными функциями u_n с положительным коэффициентом при u_n^2 . В этом случае необходимым и достаточным условием минимума будет $\frac{\partial}{\partial u_n} D_n = 0$. Но в D_n входят члены, зависящие от u_n как в явном,

так и в неявном виде. Если строить процедуру минимизации, учитывая как явную, так и неявную зависимость D_n от коэффициентов u_n , то, как отмечено в [74], наблюдается несоответствие коэффициентов u_n , полученных асимптотическим методом и из решения уравнения Беллмана. Если в процедуре минимизации учитывать только явную зависимость, то коэффициенты u_n , определенные асимптотическим методом и из решения уравнения Беллмана, будут одинаковыми.

Для исследования вычислительной эффективности алгоритма синтеза на основе асимптотического принципа оптимальности был проведен вычислительный эксперимент. Решались задачи синтеза для систем различного порядка асимптотическим методом и методом динамического программирования.

Результаты вычислительного эксперимента по сравнению эффективности алгоритмов приведены в табл. 3.

Таблица 7.3

Порядок системы	t_6 , мин	t_a , сек	Порядок системы	t_6	t_a , мин
2	30 сек	10	20	—	1,5
5	4	20	25	—	3
10	40	35	30	—	5
15	80	1 мин	35	—	10

Примечание. t_6 — машинное время, затраченное при синтезе методом динамического программирования; t_a — машинное время, необходимое для асимптотического синтеза.

Полученные результаты показывают, что асимптотический синтез значительно более эффективен в вычислительном отношении, чем синтез методом динамического программирования. Это связано с тем, что при изучении задачи синтеза методом динамического программирования необходимо решать задачу Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 7.1—7.3). Порядок этой системы зависит от размерности вектора x следующим образом:

$$P = (N^2 + N)/2,$$

где N — размерность вектора x .

В рассматриваемом алгоритме синтеза размерность вектора учитывается только при вычислении скалярных произведений

$$[x_{pk} \cdot x_{n-ps}].$$

Особенностью задач синтеза оптимальных систем управления является необходимость получения информации об управлении в символическом виде. Объем этой информации может служить критерием эффективности метода.

Так, при синтезе методом динамического программирования при постулировании критерия качества в виде

$$\Psi(x, t_1) = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N u_{np} x_n x_p, \quad u_{np} = u_{pn},$$

N — размерность вектора x , синтезируемое управление выражается через коэффициенты u_{np} , количество которых равно $(N^2 + N)/2$.

При асимптотическом методе синтеза количество коэффициентов u_{np} , через которые выражается синтезированное управление, не зависит от размерности вектора x . Это приводит к большой экономии памяти вычислительной машины, что позволяет решать задачи синтеза систем управления большой размерности.

§ 7.11. Синтез оптимального управления нелинейными системами на основе асимптотического принципа оптимальности¹

Пусть движение регулируемой системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, t) + Cu, & t \in I_T, & \quad I_T \subseteq [t_0, T]; \\ x &= x_0 \Big|_{t=t_1}, \end{aligned} \quad (7.76)$$

где x — N -мерный вектор, u — скаляр, $F(x, t)$ — аналитическая функция.

Необходимо найти u из условия

$$\Psi(x, t_1) = \min_u \int_{t_1}^T \chi(\sigma) W(x, u) d\sigma,$$

где подынтегральное выражение — аналитическая функция своих аргументов.

Запишем поставленную задачу в пространстве малого времени

$$\frac{dx}{d\tau} (1 - \tau) = \frac{1}{q} [F^*(x, \tau) + Cu], \quad x = x_0 \Big|_{\tau=0}; \quad (7.77)$$

$$\Psi(x, \tau_T) = \min_u \int_0^{\tau_T} W^*(x, u, \tau_\sigma) d\tau_\sigma. \quad (7.78)$$

Переход к малому времени осуществляется с помощью преобразований § 7.10.

Рассмотрим задачу (7.77) для функции ошибки

$$W^* = (1 - \tau) (\|x\|_{RN}^2 + \rho u^2).$$

¹ Этот параграф написан В. И. Нещеретом.

Прежде чем перейти к нахождению коэффициентов u_n по условиям теоремы 2 (см. § 7.5), необходимо получить связь между x_n и u_n из решения задачи Коши (7.77). Как будет видно из дальнейшего, свойства этого решения в значительной степени определяют решение задачи оптимизации.

В главе 6 доказаны теоремы о сходимости решения задачи (7.77) в виде асимптотического ряда. Это решение определяется формулой

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1} + \frac{F_{n-1}}{nq} + \frac{Cu_{n-1}}{nq}, \quad (7.79)$$

где F_n — коэффициенты разложения функции $F^*(x, \tau)$ в ряд

$$F^*(x, \tau) = \sum_{n=0}^L F_n \tau^n + O(\tau^{L+1}). \quad (7.80)$$

Ниже будет исследована оптимизация системы с полиномом степени M в правой части

$$\frac{dx^i}{d\tau}(1 - \tau) = \frac{1}{q} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N A_m^{ij}(\tau)(x)^m + C^i u \right], \quad i = \overline{1, N}. \quad (7.81)$$

Рекуррентная формула для этого уравнения

$$x_n^i = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1}^i + \frac{1}{nq} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{n-1} A_{ms}^{ij} V_{m,n-1-s}^j + C^i u_{n-1} \right).$$

Здесь (см. § 6.5)

$$V_{m_0}^j = (x_0^j)^m, \quad V_{mn}^j = \frac{1}{nx_0^j} \sum_{k=1}^n V_{m,n-k}^j x_k^j (km + k - n), \quad n \geq 1;$$

A_{ms}^{ij} — коэффициенты известного разложения

$$A_m^{ij}(\tau) = \sum_{s=0}^L A_{ms}^{ij} \tau^s + O(\tau^{L+1}).$$

Итак, коэффициенты разложения управления u_i находятся на основании теорем § 7.5, 7.6 с учетом рекуррентных зависимостей (7.79). В общем виде

$$x_n = \varphi(x_{n-1}, \dots, x_0) + \frac{C}{nq} u_{n-1}.$$

Для линейной системы рекуррентная формула (7.79) имеет простой вид (см. § 7.10), и при $A = \text{const}$ можно легко получить яв-

ную зависимость

$$x_n = f(x_0, u_{n-1}, \dots, u_0), \quad (7.82)$$

которую затем использовать для нахождения коэффициентов u_i в функции от x_0 .

Для нелинейных систем получать зависимость (7.82) затруднительно даже в простейших случаях.

В выражении (7.82) учтена как явная, так и неявная зависимость x_n от управления — через x_{n-1} , x_{n-2} и т. д. Если не учитывать u_i , неявно содержащиеся в φ , то процедура минимизации упрощается и может быть проведена в общем виде для произвольной функции $F(x, t)$. Сравнение значений функционала, полученных обоими способами, показало их хорошее совпадение. Такая же методика использована в работе [61] (см. § 7.12), что позволило получить полное совпадение с известным решением.

Для уравнения (7.76), в которое управление входит линейно, искомым коэффициент u_{0n} явно входит только в один «старший» сомножитель x_{ij} из произведения $x_{pk}x_{n-p}$, в коэффициенте D_g , т. е. в тот, в котором больше сумма $i+j$, причем эта зависимость линейная. Следовательно, общая зависимость D_g от u_{0n} при $n = (g-1)/2$ остается квадратичной и коэффициенты u_{0n} можно определять по условию $\partial D_g / \partial u_{0n} = 0$. Получаем

$$u_{0n} = \frac{1}{\zeta(n)} \left(\frac{C}{\rho q} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+2} \sum_{k=1}^N x_{i,n-1-i}^k + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{i,n-1}^j u_{0j} \right),$$

$$\zeta(n) = -1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} R_{i,n-i}^n. \quad (7.83)$$

В табл. 7.4 приведены номера тех x_{ij} , которые необходимы для вычисления u_{0n} .

Таблица 7.4

i	j					
	0	1	2	...	$n-3$	$n-2$
0	00	—	—	...	—	—
1	10	11	12	...	1, $n-3$	1, $n-2$
2	20	21	22	...	2, $n-3$	
⋮	⋮	⋮	⋮	...		
⋮	⋮	⋮	⋮	...		
$n-2$	$n-2,0$	$n-2,1$				
$n-1$	$n-1,0$					

Описанный алгоритм был исследован в задачах различной размерности. Приведем типичные результаты сравнения описанных выше методов по функционалу и вычислительной эффективности на примере некоторой системы переменной размерности,

параметры которой будем определять по простому закону:

$$x_0^l = 1/2l, \quad C_l = 1/l, \quad A_{lp} = -\frac{1}{N} - \frac{1}{N(l+1)} \operatorname{sign}(l-p),$$

$$l, p = \overline{1, N}. \quad (7.84)$$

Вычисления выполнены на машине БЭСМ-4.

Первый метод, описывающий как явную, так и неявную зависимость фазовых координат от управления, был реализован в работе [105] (см. § 7.10). Сопоставление его по функционалу с методом Беллмана дало их полное совпадение, поэтому сравним с ним вторую процедуру. В табл. 7.5 приведены значения функционала, вычисленные при оптимизации линейной системы двумя способами, а также относительная ошибка $\Delta = (\Psi_{II} - \Psi_I) / \Psi_I$.

Таблица 7.5

N	Ψ_I	Ψ_{II}	Δ
1	0,106700	0,107773	0,01
3	0,144900	0,147550	0,015
5	0,157048	0,160610	0,019
10	0,168898	0,172830	0,023

В табл. 7.6 дано время синтеза оптимального управления линейной и нелинейной систем с различной степенью полинома M в правой части.

Таблица 7.6

M	N				
	5	10	15	20	25
1	10 сек	22 сек	42 сек	1 мин 10 сек	1 мин 50 сек
3	1 мин	2 мин 10 сек	4 мин 10 сек	6 мин 30 сек	11 мин
5	1 мин 40 сек	2 мин 40 сек	6 мин 50 сек	10 мин 50 сек	17 мин 20 сек

Как указывалось выше, в описанном методе синтеза одновременно с вычислением коэффициентов u_{on} решается задача динамики (7.77). Отметим, что на это тратится большая часть времени, а на определение коэффициентов управления по формуле (7.83) требуется независимо от вида правой части оптимизируемой системы даже для систем большой размерности лишь 2—3 сек. Таким образом, вычислительная эффективность исследуемого метода в основном определяется свойствами решения задачи Коши. Метод пространства малого времени достаточно эффективен в этом отношении по сравнению с численными методами [60].

Важным следствием этого является то, что время, необходимое для вычисления каждого последующего приближения, увеличивается приблизительно на постоянную величину.

Итак, разработанный метод приближенного синтеза оптимального управления на основе асимптотического принципа оптимальности позволяет оптимизировать линейные и нелинейные системы с постоянными и переменными параметрами и является эффективным в вычислительном отношении.

§ 7.12. Асимптотический метод выбора оптимального управления в задаче жесткого слежения по траектории¹

1. Для многих процессов, в которых отклонение состояния от заданного должно быть минимальным в каждый момент времени, удобно использовать в качестве критерия жесткого слежения квадрат отклонения в произвольной точке t_1 отрезка $[0, \infty]$

$$e^2(t_1) = |x(t_1) - \bar{x}(t_1)|^2. \quad (7.85)$$

Эта задача, как будет показано ниже, частично может быть решена геометрическим путем, аналогично [8]. Особенно интересно здесь применение асимптотических методов. Если в случае интегрального квадратичного функционала управление ищется в виде двойного ряда, то для критерия жесткого слежения управление и фазовые координаты будут представлены простым разложением. Это одно из преимуществ общего функционала (7.85).

Рассмотрим следующую задачу. Движение системы описывается уравнением

$$\dot{x} = F(x, t) + Cu + \varphi(t), \quad x = x_0|_{t=t_1}, \quad (7.86)$$

где x — вектор $(N \times 1)$; u — вектор $(K \times 1)$; C — матрица $(N \times K)$; $\varphi(t)$ — возмущение, $K \leq N$.

Будем предполагать, что ранг матрицы C равен K , т. е. векторы $C_j (C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{Nj})$, образующие столбцы матрицы C , линейно независимы.

Требуется найти управление $u(t)$, которое обеспечит наибольшую близость состояния системы $x(t)$ к заданному состоянию $\bar{x}(t)$ в каждый момент времени t из рабочего интервала, начиная с некоторого t_1 , т. е. определить его из условия

$$\Psi(t) = \min_{u \in \bar{U}} \Phi(\dot{t}) = \min_{u \in \bar{U}} \|x(t) - \bar{x}(t)\|_{R^N}^2. \quad (7.87)$$

Запишем эту задачу в малом времени

$$\frac{dx}{d\tau} (1 - \tau) = \frac{1}{q} [F^*(x, \tau) + Cu], \quad (7.88)$$

$$x = x_0|_{\tau=0};$$

¹ Этот параграф написан В. И. Нещеретом по материалам работы [61].

$$\Psi(\tau) = \min_u \Phi(\tau) = \min_u \|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\|^2, \quad (7.89)$$

где $\tau = 1 - \exp[-q(t - t_1)]$.

Будем искать решение в виде асимптотических разложений:

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^L x_n \tau^n + O(\tau^{L+1}), \quad (7.90)$$

$$u(\tau) = \sum_{n=0}^L u_n \tau^n + O(\tau^{L+1}). \quad (7.91)$$

Естественно считать известными разложения:

$$\bar{x}(\tau) = \sum_{n=0}^L \bar{x}_n \tau^n + O(\tau^{L+1}), \quad \varphi(\tau) = \sum_{n=0}^L \varphi_n \tau^n + O(\tau^{L+1}).$$

Тогда получаем

$$\Phi(\tau) = \sum_{g=0}^L D_g \tau^g + O(\tau^{L+1}). \quad (7.92)$$

Приведем первые коэффициенты D_g :

$$D_0 = \sum_{i=1}^N (x_0^i - \bar{x}_0^i)^2,$$

$$D_1 = \sum_{i=1}^N 2(x_0^i - \bar{x}_0^i)(x_1^i - \bar{x}_1^i),$$

$$D_2 = \sum_{i=1}^N [(x_1^i - \bar{x}_1^i)^2 + 2(x_0^i - \bar{x}_0^i)(x_2^i - \bar{x}_2^i)].$$

2. Рассмотрим случай $x_0^i = \bar{x}_0^i$ для всех $i=1, 2, \dots, N$. Это определяет задачу удержания системы на заданной траектории. Так как $D_0 = D_1 = 0$, то нужно рассмотреть второй коэффициент.

В соответствии с рекуррентной формулой задачи Коши получаем

$$D_2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{q} F_0^i + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^K C_{ij} u_0^j + \frac{1}{q} \varphi_0^i - \bar{x}_1^i \right)^2.$$

Этот коэффициент имеет минимальное значение при u_0^p ($p = \bar{1}, \bar{K}$), определяемых из условия $\partial D_2 / \partial u_0^p = 0$. Это условие приводит к системе линейных алгебраических уравнений размерности K

$$\sum_{s=1}^K u_0^s \sum_{i=1}^N C_{is} C_{ip} = \sum_{i=1}^N C_{ip} (q \bar{x}_1^i - F_0^i - \varphi_0^i). \quad (7.93)$$

Так как t_1 — произвольная точка отрезка $[0, \infty)$, то управление, определяемое уравнением (7.93), зависит в каждый момент времени только от текущего состояния системы $F_0(x_0)$ и внешних возмущений φ_0 и не зависит от значения управления в другие моменты времени. Действительно, u_0, x_0, φ_0 — значения управления, вектора состояния и внешних возмущений, а $q\bar{x}_1$ — значение производной \dot{x} заданной траектории в момент времени t_1 , т. е. при $t=0$.

Полученное решение можно записать в форме обратной связи

$$\sum_{s=1}^K u^s \sum_{i=1}^N C_{is} C_{ip} = \sum_{i=1}^N C_{ip} [\dot{x}_i - F^i(x) - \varphi^i]. \quad (7.94)$$

Это уравнение представим в ином виде

$$\sum_{s=1}^K u^s [C_p, C_s] = [C_p, r], \quad p = \overline{1, K}, \quad (7.95)$$

где

$$r = \dot{x} - F(x) - \varphi, \quad (7.96)$$

$[C_p, C_s], [C_p, r]$ — скалярные произведения в R^N .

Следовательно, формулы (7.94) и (7.95) имеют более простой вид, если система векторов C_1, \dots, C_K ортонормированная:

$$u^s = [C_s, r] = \sum_{i=1}^N C_{is} (\dot{x}_i - F^i(x) - \varphi^i), \quad s = \overline{1, K}. \quad (7.97)$$

Этого всегда можно достичь для системы линейно-независимых векторов.

Аналогичное исследование и последовательная минимизация коэффициентов D_g позволяют найти остальные коэффициенты по условию $\partial D_g / \partial u_n^s = 0, n = (g/2) - 1$, где g — четные. В общем виде

$$D_g = \sum_{i=1}^N [(\dot{x}_{g/2}^i - \bar{x}_{g/2}^i) + 2 \sum_{p=0}^{g/2-1} (x_p^i - \bar{x}_p^i) (x_{g-p}^i - \bar{x}_{g-p}^i)],$$

откуда получаем

$$\sum_{s=1}^K u_n^s \sum_{i=1}^N C_{is} C_{ip} = \sum_{i=1}^N C_{ip} \left\{ g(n+1) \left[\bar{x}_{n+1}^i - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x_n^i \right] - F_n^i - \varphi^i \right\}, \quad p = \overline{1, K}. \quad (7.98)$$

В случае системы ортонормированных векторов C_j эту формулу можно записать аналогично (7.97)

$$u_n^s = [C_s, r_n] = \sum_{i=1}^N C_{is} \left\{ q^{(n+1)} \left[\bar{x}_{n+1}^i - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x_n^i \right] - F_n^i - \varphi_n^i \right\}.$$

Видно, что при каждом n для вычисления u_n необходимо предварительно рассчитать $x_n = f(u_{n-1})$ по рекуррентной формуле задачи Коши. В результате такой рекуррентной процедуры будут определены все необходимые коэффициенты асимптотических разложений, следовательно, будет решена задача в виде программного управления $u(\tau)$ и найдена соответствующая траектория $x(\tau)$.

Интересно, что формулу (7.98) можно получить и иным путем. Оптимальное поведение управляемой системы, начиная с момента t_1 , полностью определяется уравнениями (7.86) и (7.94). Решение дифференциального уравнения (7.86) дается формулами (7.90), (7.91). Если величины, входящие в (7.94), рассматривать как функции времени, то решение этого функционального уравнения можно легко найти в виде (7.91). Такие уравнения рассматривались в [58] (см. § 6.4). В результате решения уравнения (7.94) получается рекуррентная формула, которая полностью совпадает с (7.98).

Если на скалярное управление наложено ограничение $|u| \leq \bar{u}$, то решением будет функция

$$u = \begin{cases} u^*, & \text{если } |u^*| \leq \bar{u} \\ u \operatorname{sign} u^*, & \text{если } |u^*| > \bar{u}, \end{cases}$$

где u^* — управление, которое получается по формулам (7.94) и (7.98). В случае векторного управления необходимо решать соответствующую задачу квадратичного программирования.

Обсудим физический смысл полученных результатов и сравним их с известными.

Решение в том виде, как оно записано выше, т. е. при t , определяемом формулой (7.96), получено из условия наилучшего приближения в каждый момент времени вектора скорости заданной траектории $\bar{x}(t)$ вектором скорости решения исходной системы. Поэтому оно аналогично (в форме (7.95)) найденному в работах [7, 8] и совпадает с одним из результатов работы [46], автор которой, однако, строит решение не относительно $x(t)$, а относительно удачно выбираемой системы переходных кривых.

Рассмотрим две исходные концепции. С некоторой ошибкой δ_1 можно написать

$$\dot{x} = F(x) + Cu + \varphi = \dot{\bar{x}} + \delta_1.$$

Точное равенство достижимо лишь при $K \geq N$. Можно рассуждать иначе. С некоторой точностью траектория $\bar{x}(t)$ должна быть решением системы (7.86)

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, t) + Cu + \varphi + \delta_2.$$

Нетрудно перейти к аналогичной форме

$$\dot{x} = F(\bar{x}, t) + Cu + \varphi + \delta_3, \quad \delta_3 = \delta_1 + \delta_2. \quad (7.99)$$

Первый подход приводит к $r(x)$ по формуле (7.96), во втором случае должно быть

$$r(\bar{x}) = \dot{\bar{x}} - F(\bar{x}) - \varphi. \quad (7.100)$$

Тогда, исходя из (7.99), получаем те же формулы, но функция F везде должна зависеть от \bar{x} .

Обозначим через B линейное пространство, натянутое на векторы C_1, \dots, C_n . Длина вектора δ будет минимальной тогда, когда вектор $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n$ является проекцией вектора r на подпространство B . Следовательно, числа u_1, \dots, u_n должны определяться из системы (7.95), определитель которой равен определителю Грама.

Получается, что задача о минимуме расстояния от точки с радиус-вектором r до подпространства решена в пространстве R^n аналитическим путем.

3. Рассмотрим случай $x_0 \neq \bar{x}_0$. Так как D_0 от управления не зависит, то необходимо рассмотреть коэффициент D_1 . Не будем теперь уточнять вид функции F , т. е. зависит ли она от x или от \bar{x} . Учитывая рекуррентную формулу для x_n , запишем

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2}{q} \sum_{i=1}^N (x_0^i - \bar{x}_0^i) \left(F_0^i + \sum_{j=1}^K C_{ij} \mu_j^i + \varphi^i - q \bar{x}_1^i \right) = \\ &= \frac{2}{q} \left\{ \sum_{i=1}^N (x_0^i - \bar{x}_0^i) \sum_{j=1}^N C_{ij} \mu_j^i + 2 \sum_{i=1}^N [(x_0^i - \bar{x}_0^i) (F_0^i + \varphi_i - q \bar{x}_1^i)] \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим первое слагаемое I_1 , а второе I_2 . Так как индекс нуль соответствует значениям величин в произвольной точке t_1 , то его можно опустить, заменить $q \bar{x}_1^i$ на \bar{x}^i и считать все величины текущими.

Видно, что минимальное значение D_1 будет достигаться при значениях управления, получаемых в результате минимизации линейной формы

$$I_1 = \sum_{j=1}^K u^j \sum_{i=1}^N C_{ij} (x^i - \bar{x}^i) = \sum_{j=1}^K C_j^* u^j - \min. \quad (7.101)$$

В каждый момент времени необходимо выбирать управление из ограниченной области \bar{U} по условию (7.101), т. е. решать задачу математического программирования. В наиболее часто встречающемся случае параллелепипедных ограничений

$$\underline{u}^j \leq u^j \leq \bar{u}^j$$

решение задачи линейного программирования очевидно. Выбор верхней или нижней границы u^j определяется знаком коэффициента C_j^* , который зависит от текущего состояния систем.

Рассмотрим физический смысл полученного решения. Легко видеть, что минимизация D_1 соответствует минимизации функционала $I = d\Phi/dt$. Действительно, коэффициенты разложения нового функционала

$$I = \sum_{n=0}^L G_n \tau^n + O(\tau^{L+1})$$

связаны с D_n таким образом:

$$\frac{1}{q} G_n = (n+1) D_{n+1} - n D_n.$$

Следовательно, $G_0 = q D_1$. Исходный функционал $\Phi(t)$ всегда положителен, поэтому минимизация производной в каждой точке обеспечивает ему минимальное значение.

Итак, решение задачи жесткого слежения по траектории методом асимптотического программирования позволило естественно выделить в ней и в рамках единого метода решить две проблемы, соответствующие двум этапам осуществления заданного решения.

На первом этапе, когда начальное состояние системы произвольно ($x_0 \neq \bar{x}_0$), ищется управление, которое обеспечивает выход на заданную траекторию. С некоторой точки t_1 , когда $x_0 = \bar{x}_0$, определяется управление, которое обеспечивает движение по этой траектории. Это вполне согласуется с известной концепцией [9] в решении таких задач.

Замечания: 1. Представление функции $F(x, t)$ в правой части исходного уравнения в виде ряда предполагает, что она является аналитической или достаточно гладкой. В действительности это требование относительно $F(x, t)$, а также $\bar{x}(t)$ и $\varphi(t)$ должно в данной задаче выполняться лишь для случая $x_0 = \bar{x}_0$ при решении в виде программного движения, т. е. с использованием формулы (7.98). При решении в форме (7.94) или при минимизации выражения (7.101) очевидно, что $F(x, t)$ и $\varphi(t)$ могут быть кусочно-непрерывными функциями, а $\bar{x}(t)$ должна иметь кусочно-непрерывную производную.

2. Режим $\bar{x}(t)$ устойчив по отношению к системе $x = F(x, t)$, если нулевое решение системы

$$\dot{z} = F(z + \bar{x}, t) - F(\bar{x}, t), \quad z = x - \bar{x} \quad (7.102)$$

асимптотически устойчиво. Только устойчивые режимы могут претендовать на хорошее приближение [9]. Поэтому, осуществляя переход (7.102), мы можем всегда гарантировать для реальных задач сходимость соответствующих разложений [60].

3. Все полученные результаты в рамках метода функциональных параметров могут быть распространены на более широкий круг задач, когда программа движения $\bar{x}(t)$ задана уравнением

$$\Omega[\bar{x}(t), t] = 0, \quad (7.103)$$

если последнее определяет единственную неявную функцию. Действительно, все формулы выше записаны относительно \bar{x}_n , следовательно, достаточно найти \bar{x}_n из решения функционального уравнения (7.103) в пространстве малого времени [58] (см. § 6.4), и все предыдущие выкладки остаются в силе.

Глава 8

КЛАССЫ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 8.1. Компактные классы корректности

Если пространство состояний системы $E(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, то корректно поставленная задача Коши для линейных уравнений в частных производных имеет решение в виде ряда (см. гл. 6)

$$\varphi = \sum_{n=0}^N \varphi_n \tau^n + O(\tau^{N+1}), \quad \tau = 1 - e^{-qt}, \quad q > 0. \quad (8.1)$$

Однако построение асимптотических решений начально-краевых задач связано с некоторыми затруднениями. Одно из них состоит в следующем: если в пространстве малого времени задача Коши сформулирована в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} (1 - \tau) = \frac{A\varphi}{q}, \quad \{\varphi_0, \varphi\} \in C^\infty(\Omega); \quad (8.2)$$

$$\varphi = \varphi_0|_{\tau=0}, \quad \tau \in [0 \div 1),$$

то в силу уравнения (8.2) рекуррентная формула для φ_n имеет вид

$$\varphi_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_{n-1} + \frac{1}{nq} A\varphi_{n-1}, \quad \varphi_{n-1} \in C^\infty(\Omega). \quad (8.3)$$

Построим решение вида (8.1) для линейной начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} (1 - \tau) = \frac{A\varphi}{q}, \quad \{\varphi_0, \varphi\} \in C^\infty(\Omega); \quad (8.4)$$

$$\varphi = \varphi_0|_{\tau=0}, \quad \tau \in [0 \div 1), \quad L\varphi = F(\tau, g), \quad g \in S,$$

где $L\varphi$ — оператор граничных условий, S — боковая поверхность цилиндра $\bar{\Omega} = \Omega \times I_1$, $I_1 \subseteq [0 \div 1)$.

Для задачи (8.4) функции φ_n будут также определяться формулой (8.3), но дополнительно они должны удовлетворять условию

$$L\varphi_n = F_n(g), \quad F(\tau, g) = \sum_{n=0}^{N_1} F_n(g) \tau^n. \quad (8.5)$$

Ясно, что для произвольных начальных данных $\varphi_0 \in C^\infty(\Omega)$ условие (8.5) удовлетворяться не будет, и, следовательно, начально-краевая задача (8.4) не обладает предельной корректностью ($\tau \rightarrow 0$).

Подход к преодолению возникшего затруднения аналогичен подходу при определении корректности по А. Н. Тихонову [96]. Будем постулировать существование некоторого компактного множества начальных данных $\hat{E}(\Omega) \subset E(\Omega)$, для которого условие (8.5) выполняется. Если это так, то задача (8.4) будет обладать предельной корректностью на компактном множестве начальных данных $\hat{E}(\Omega)$. Однако постулирование существования компактного множества $\hat{E}(\Omega)$ еще не приносит нужного эффекта, поскольку его структура зависит от операторов A и L , а задача определения структуры множества $\hat{E}(\Omega)$ не легче исходной задачи. Это обстоятельство приводит к необходимости переформулировки исходной проблемы.

Введем в рассмотрение оператор P (регуляризатор), который осуществляет переход элемента $\varphi_0 \in E_0(\Omega)$ в элемент $\hat{\varphi}_0 \in \hat{E}(\Omega)$ ($\varphi_0 \in \hat{E}(\Omega)$) с условием

$$\rho_E^*(\varphi_0, \hat{\varphi}_0) = \min \rho_E(\varphi_0, P\varphi_0).$$

Поскольку на компактном множестве $\hat{E}(\Omega)$ начально-краевая задача (8.4) обладает предельной корректностью, то можно постулировать существование непрерывного оператора $L(\tau) \in C(0, 1)$, такого, что

$$\varphi = L(\tau) \hat{\varphi}_0 = L(\tau) P\varphi_0. \quad (8.6)$$

Пусть $\varphi_\infty(g)$ — стабилизированное решение начально-краевой задачи (8.4), обладающее свойством

$$\lim_{\substack{g_1 \rightarrow g \\ \tau \rightarrow 1}} \|\varphi(g_1, \tau) - \varphi_\infty(g)\| = 0. \quad (8.7)$$

Из свойства компактности множества $\hat{E}(\Omega)$ следует, что существует непрерывный обратный оператор $L^{-1}(\tau_1) \in C(0, 1)$, если существует $L(\tau) \in C(0, 1)$.

Вводя обратное малое время τ_1 , имеем

$$\varphi = L^{-1}(\tau_1) \varphi_\infty. \quad (8.8)$$

Построив разложение оператора $L^{-1}(\tau_1)$ по шкале $\{\tau_1^\alpha\}$, получаем асимптотическое решение исходной задачи вида

$$\varphi = \varphi_\infty + \tau_1 \varphi_1 + \tau_1^2 \varphi_2 + \dots + \tau_1^n \varphi_n + O(\tau_1^{n+1}). \quad (8.9)$$

Если существует стабилизированное решение начально-краевой задачи φ_∞ , то можно построить решение вида (8.9) без использования информации о начальных данных $\hat{\varphi}_0$, но тогда возникает вопрос о попадании решения (8.9) при $\tau_1 \rightarrow 1$ в заданное состояние $\hat{\varphi}_0$.

Ясно, что если существует формализм построения единственного асимптотического решения вида (8.9), в котором используется только информация о φ_∞ , то вопрос о попадании в заданное состояние $\hat{\varphi}_0$ в рамках этого формализма положительно не решается. В связи с этим возникают вопросы о выяснении существа решений типа (8.9) и о развитии формализма решения начально-краевой задачи.

Если ввести в рассмотрение конус операторов $D(\tau)$ [$L(\tau) \in \in D(\tau)$], то этот конус будет отображать компактное множество начальных данных $\hat{E}(\Omega)$ в компактное множество $\hat{E}_\tau(\Omega)$:

$$D(\tau) \hat{E}(\Omega) \rightarrow \hat{E}_\tau(\Omega). \quad (8.10)$$

В задаче с одним стабилизированным решением φ_∞ множество $\hat{E}_\tau(\Omega)$ обладает свойством

$$\hat{E}_\tau(\Omega) \rightarrow \varphi_\infty, \quad \tau \rightarrow 1. \quad (8.11)$$

Но тогда по свойству непрерывности элементов $L(\tau) \in D(\tau)$ и компактности $\hat{E}(\Omega)$ существует множество обратных операторов:

$$D_1(\tau_1) = D^{-1}(\tau), \quad D_1(\tau_1) \varphi_\infty \rightarrow \hat{E}_\tau(\Omega). \quad (8.12)$$

Теперь на основе (8.12) может быть решена задача попадания в заданное состояние $\hat{\varphi}_0$.

Итак, на первом этапе необходимо построить разложение конуса операторов $D_1(\tau_1)$ по шкале $\{\tau_1^\alpha\}$

$$D_1(\tau_1) = 1 + \tau_1^{\alpha_1} D_{11} + \tau_1^{\alpha_2} D_{12} + \dots + O(\tau_1^{\alpha_n}), \quad (8.13)$$

а на втором этапе решить задачу аппроксимации

$$\rho^*(\varphi_0, \hat{\varphi}_0) = \min_{\tau_1 \rightarrow 1} \rho(\varphi_0, D_1 \varphi_\infty). \quad (8.14)$$

Сходимость асимптотического алгоритма со шкалой $\{\tau_1^\alpha\}$ на всем временном интервале следует из свойства компактности пространства $\hat{E}(\Omega)$.

Рассматривая конкретную реализацию $L_1(\tau_1) \in D_1(\tau_1)$, имеем разложение

$$L_1^n(\tau_1) = 1 + \tau_1^{\alpha_1} L_{11} + \tau_1^{\alpha_2} L_{12} + \dots + \tau_1^{\alpha_n} L_{1n} + O(\tau_1^{\alpha_{n+1}}).$$

Оператор $L_1^n(\tau_1)$ конструирует последовательность

$$\{\varphi_n(\tau_1)\} = \{L_1^n(\tau_1) \varphi_\infty\} \in \hat{E}_\tau(\Omega).$$

В свою очередь последовательность $\{\varphi_n(\tau_1)\} \rightarrow \{\varphi_n\}$, $\tau_1 \rightarrow 1$, а последовательность $\{\varphi_n\}$ имеет предельную точку φ_0 в силу (8.14).

В итоге вопрос о предельной корректности начально-краевой задачи (относительно предела $t \rightarrow \infty$) нами сведен к выяснению существования шкалы $\{\tau_1^\alpha\}$, по которой происходит разложение конуса операторов $D_1(\tau_1)$ (8.13). Если имеется шкала сравнения $\{\tau_1^\alpha\}$, по которой возможно построение асимптотического разложения (8.13) и стабилизированное решение φ_∞ , то начально-краевая задача для уравнений в частных производных обладает корректностью в предельном смысле относительно предела $\tau \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрение компактного класса предельной корректности связано с начально-краевой задачей (8.4). Однако все общие результаты остаются без изменений при изучении произвольных задач математической физики, обладающих необходимыми свойствами.

Если начать рассмотрение на уровне обобщенного оператора T_φ , то исходная формулировка проблемы выглядит так:

$$T\varphi = \chi, \quad g \in E(\Omega), \quad \varepsilon \in [0 \div \infty); \quad \varphi = \varphi_0|_{\varepsilon=0}$$

и существует предельная модель

$$T_\infty \varphi_\infty = \chi_\infty, \quad g \in E(\Omega), \quad \varepsilon \rightarrow \infty.$$

В общей модели предел $\varepsilon=0$ оказывается корректным только на компактном множестве $\hat{E}(\Omega)$, а предел $\varepsilon=\infty$ корректен на множестве решений, даваемых предельной моделью. В этом случае можно ставить задачу построения асимптотического решения вида (8.14), но для ее разрешимости требуются специальные свойства общей математической модели, необходимые для существования разложений конуса операторов $D_1(\tau_1)$ вида (8.13).

В следующем параграфе мы рассмотрим параболические уравнения, для которых можно указать условия разрешимости этой задачи.

З а м е ч а н и е. Из результатов настоящего параграфа следует, что начально-краевые задачи могут иметь асимптотические решения в терминальном классе корректности K_2 .

§ 8.2. Классы предельной корректности в задачах для параболических уравнений

Изучим две задачи для параболического уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi,$$

где A — линейный эллиптический оператор с коэффициентами, зависящими от времени.

1. Начально-краевая задача:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi, \quad \varphi \in E(\Omega), \quad g \in \Omega \subset R^n; \quad (8.15)$$

$$\varphi = \varphi_0|_{t=0}, \quad L\varphi = F(g, t), \quad g \in S, \quad t \in I \subseteq [0 \div \infty),$$

где S — боковая поверхность цилиндра $\Omega_1 = \Omega \times I$; L — линейный оператор.

2. Краевая задача:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi, \quad \varphi \in E(\Omega); \quad g \in \Omega \subset R^n; \quad (8.16)$$

$$L\varphi = F(g, t), \quad g \in S.$$

Введем обобщенный оператор \bar{A} , включающий операторы A и L , $\bar{A} = \begin{Bmatrix} A \\ L \end{Bmatrix}$. Заметим, что для $E(\Omega) = L_2(\Omega)$ доказаны теоремы

существования и единственности решения начально-краевой задачи. Соответственно в краевой задаче (8.16) не будет существовать единственное решение (для $E(\Omega) = L_2(\Omega)$), и, следовательно, она сформулирована некорректно.

Одним из основных результатов настоящего параграфа является установление класса предельной корректности, в котором существует единственное решение задачи (8.16).

Определение 1. Если оператор \bar{A} имеет точечный спектр с единственной точкой на бесконечности и собственные значения $\lambda_\beta < 0$, то шкала $\{\tau_\beta\}$, $\tau_\beta = \exp(-|\lambda_\beta|t)$ называется спектральной шкалой оператора \bar{A} .

Определение 2. Шкала $\{\tau^i\}$ называется регулярной шкалой оператора \bar{A} , если $\{\tau^i\} \cap \{\tau_\beta\} = \emptyset$.

Определение 3. Шкала $\{\tau_{\beta i}\}$ называется расширенной спектральной шкалой оператора \bar{A} , если кроме спектральных элементов $\tau_\beta = \exp(-|\lambda_\beta|t)$ она содержит регулярные элементы вида

$$\tau^i = \exp[-(|\lambda_{\beta_1}| + |\lambda_{\beta_2}| + \dots + |\lambda_{\beta_k}|)t].$$

Соответственно спектральные элементы шкалы формируют спектральную часть шкалы $\{\tau_\beta\}$, а регулярные — регулярную часть шкалы $\{\tau^i\}$.

Как следует из определений, для оператора A (или \bar{A}) существуют три типа шкал: регулярная, спектральная, расширенная спектральная (в приведенной ранее классификации шкал были выделены два типа: групповая и квазигрупповая; см. гл. 1). В этой классификации существенно то, что она была основана только на свойствах шкал и не учитывала свойств математических моделей.

Определения 1—3 дают типы шкал в связи со свойствами оператора A (или \bar{A}).

Отметим, что в терминальном классе корректности K_2 асимптотические разложения могут существовать только по спектральной или расширенной спектральной шкале. Соответственно для дальнейшего класса K_2 удобно разбить на два подкласса: $K_2^1(A)$ и $K_2^2(A)$.

Определение 4. Подкласс $K_2^1(A) \subset K_2$ называется спектральным классом корректности, если любой элемент этого подкласса допускает асимптотическое разложение по спектральной шкале оператора A .

Определение 5. Подкласс $K_2^2(A) \subset K_2$ называется расширенным спектральным классом корректности, если любой элемент этого подкласса допускает асимптотическое разложение по расширенной спектральной шкале оператора A .

Теорема 1. *Начально-краевая задача для параболического уравнения*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi, \quad \varphi \in E(\Omega);$$

$$\varphi = \varphi_0|_{t=0}, \quad L\varphi = F(g, t), \quad g \in S$$

имеет асимптотическое решение в расширенном спектральном классе корректности $K_2^2(A)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ в цилиндре $\bar{\Omega} = \Omega \times I$ с боковой поверхностью S , если:

а) существует предел

$$\lim_{\substack{g_1 \rightarrow g \\ t \rightarrow \infty}} \|\varphi(g_1, t) - \varphi_\infty(g)\| = 0,$$

$$\{g_1, g\} \in \Omega;$$

б) оператор A ограничен и существует разложение оператора A по регулярной части расширенной спектральной шкалы $\{\tau_{\beta_1}\}$ предельного оператора A_∞

$$\bar{A} = \bar{A}_\infty + \tau_1 \bar{A}_1 + \tau_2 \bar{A}_2 + \tau_3 \bar{A}_3 + \dots + O(\tau_{n+1}),$$

где \bar{A}_n — ограниченные операторы;

в) $\hat{\varphi}_0 = P\varphi_0 \in \hat{L}_2(\Omega)$ ($\hat{L}_2(\Omega)$ — компактное пространство);

е) $F(g, t) = \sum_{n=1}^N F_n \tau_n \in M$ ($M \subset C(0, 1)$ — компактное множество, содержащее полиномы N -й степени, τ — элементы регулярной части шкалы);

д) краевая задача

$$-q_n \varphi_n = A_\infty \varphi_n + f_n(\varphi_{n-1}, \dots, \varphi_\infty); \quad L\varphi = F_n$$

имеет ограниченное решение ($\|\varphi_n\|_{L_2} < \infty$).

Доказательство. Будем искать решение в виде асимптотического разложения

$$\hat{\varphi}_n = \varphi_\infty + \tau_1 \varphi_1 + \tau_2 \varphi_2 + \tau_3 \varphi_3 + \dots + \tau_n \varphi_n + O(\tau_{n+1}), \quad (8.17)$$

где $\tau_n = e^{-q_n t}$,

$$q_1 = |\lambda_1|, \quad q_2 = |\lambda_2|, \quad q_3 = \begin{cases} |\lambda_3| \vee |\lambda_3| < |\lambda_1| + |\lambda_2|, \\ |\lambda_1| + |\lambda_2| \vee |\lambda_3| > |\lambda_1| + |\lambda_2| \text{ и т. д.} \end{cases}$$

В силу уравнения $\partial\varphi/\partial t = A\varphi$ и условий в) и д) получаем рекуррентные краевые задачи для составляющих асимптотического разложения по спектральной и регулярной частям шкалы:

$$-|\lambda_m| \varphi_m = \overline{A}_\infty \varphi_m,$$

$$-q_n \varphi_n = A_\infty \varphi_n + f_n(\varphi_{n-1}, \dots, \varphi_\infty), \quad L\varphi = F_n, \quad (8.18)$$

причем решение первой задачи имеет вид

$$\varphi_m = \sum_{k=1} A_{mk} \Psi_{mk},$$

где Ψ_{mk} — собственные функции, соответствующие собственному значению λ_m .

В целом решение (8.17) будет зависеть от констант A_{ps} , где p пробегает множество индексов m , а s — множество индексов k и за счет этого организуется разложение типа (8.13). Константы A_{ps} определяются из решения задачи аппроксимации

$$\rho_{L_2}^*(\varphi_0, \hat{\varphi}_0^n) = \min_{\substack{A_{ps} \\ \tau \rightarrow 1}} \rho_{L_2}(\varphi_0, \hat{\varphi}_0^n). \quad (8.19)$$

Последовательность $\{\hat{\varphi}_0^n\}$ принадлежит компактному пространству $\hat{L}_2(\Omega)$ и в силу (8.19) сильно сходится к элементу φ_0 в метрике $L_2(\Omega)$. Таким образом, в условиях теоремы существует формализм асимптотического решения задачи, задаваемый рядом (8.17) и задачами (8.18), который, будучи замкнутым на задачу аппроксимации (8.19), приводит к последовательности $\{\hat{\varphi}^n\}$, обладающей свойством сходимости

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 1}} \|\hat{\varphi}^n - \varphi_0\|_{L_2} = 0.$$

Теорема 2. Решение краевой задачи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi, \quad g \in \Omega, \quad \varphi \in C^2(\Omega);$$

$$L\varphi = F(g, t), \quad g \in S,$$

где A — линейный эллиптический оператор второго порядка с коэффициентом, не зависящим от времени; L — линейный оператор граничных условий с постоянными коэффициентами, существует в регулярном классе корректности K_1 со шкалой $\{\tau^i\}$, $\tau = e^{-qt}$, $q > 0$ в цилиндре $\bar{\Omega} = \Omega \times I$, $I \subseteq [0; \infty)$, если:

а) предел

$$\lim_{\substack{g_1 \rightarrow g \\ t \rightarrow \infty}} \|\varphi(g_1, t) - \varphi_\infty(g)\| = 0;$$

$$\text{б) } F(g, t) = F(g, \tau) = \sum_{n=1}^N F_n \tau^n \in M \quad (M \in C(0, 1) \text{ — компактное}$$

множество, содержащее полиномы N -й степени);

в) решение краевой задачи

$$-nq\varphi_n = A\varphi_n, \quad L\varphi_n = F_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (8.20)$$

ограничено.

Решение исходной задачи дается формулой

$$\varphi = \varphi_\infty + \tau\varphi_1 + \tau^2\varphi_2 + \dots + O(\tau^n). \quad (8.21)$$

Доказательство теоремы 2 очень простое и состоит в конструировании алгоритма решения вида (8.21). Действительно, принимая решение в виде (8.21) и подставляя его в исходную задачу, получаем краевую задачу для функций φ_n в виде (8.20). Поскольку $\{\tau^i\}$ — регулярная шкала, то однородная краевая задача

$$-nq\varphi_n = A\varphi_n, \quad L\varphi_n = 0$$

имеет тривиальное решение $\varphi_n = 0$.

Далее, при $n < N$ задача имеет единственное решение, а при $n > N$ $\varphi_n \equiv 0$, поэтому действительно полином дает решение краевой задачи.

Замечания: 1. В теореме 2 рассмотрен простой случай задачи, когда операторы A и L не зависят от времени. Но в регулярном классе корректности K_1 можно построить асимптотические решения более общих краевых задач (нелинейные операторы A и L , зависимость A и L от времени и т. д.).

Однако мы специально выбрали простой случай, поскольку на этом примере четко просматривается методический результат; в регулярном классе корректности K_1 и $E(\Omega) = C^2(\Omega)$ существует единственное решение краевой задачи для уравнений параболического типа.

2. Исследования в классе K_1 со шкалами типа $\{\tau^t\}$, $\tau = e^{-q}$ или $\tau = 1 - e^{-q/t}$ тесно связаны с проблемой асимптотического поведения решений краевых задач при $t \rightarrow \infty$, однако мы ставим проблему несколько шире в том смысле, что по информации о поведении решения при $t \rightarrow \infty$ развиваются методы построения решения для всего временного интервала и, как следует из теоремы 2, в некоторых случаях удается построить точные решения вида (8.21).

Следует заметить, что А. Фридманом [100, стр. 205, теорема 3] построена асимптотика решения краевой задачи со шкалой $\{1/t^\alpha\}$ и его результаты в смысле существования и единственности асимптотических решений краевой задачи со шкалой $\{1/t^\alpha\}$ совпадают с нашими (см. замечание 1).

3. В регулярном классе корректности K_1 оказывается полезной в ряде прикладных задач шкала $\{\tau^t\}$, $\tau = 1 - e^{-q/t}$. В частности, в одной из прикладных проблем в работах [3, 5, 35—38, 75] были построены интересные асимптотические решения, реализованные на ЭВМ (см. § 9.1—9.4).

§ 8.3. Связь метода функциональных параметров в спектральном классе корректности с методом Фурье

Асимптотический метод решения начально-краевой задачи для параболического уравнения в расширенном спектральном классе тесно связан с методом Фурье. Кратко обсудим эту связь. Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi, \quad g \in \Omega, \quad \varphi \in L_2(\Omega), \quad (8.22)$$

$$\varphi = \varphi_0|_{t=0}, \quad L\varphi = 0, \quad g \in S,$$

где A и L — линейные операторы с постоянными коэффициентами. По методу Фурье общее решение начально-краевой задачи (8.22) будем искать в виде

$$\tilde{\varphi} = \sum_{n=0}^N A_n F_n(t) \Psi_n(g), \quad (8.23)$$

где $\Psi_n(g)$ — собственные функции обобщенного оператора A , т. е. решения следующей задачи:

$$-\lambda_n \Psi_n = A\Psi_n, \quad L\Psi_n = 0, \quad F_n(t) = e^{-\lambda_n t}.$$

Выбор коэффициентов A_n осуществляется на основе задачи аппроксимации

$$\rho_{L_2}^*(\varphi_0, \hat{\varphi}_0) = \min_{A_n} \rho_{L_2}(\varphi_0, \hat{\varphi}_0).$$

В спектральном классе корректности K_2^1 асимптотическое решение начально-краевой задачи (8.22) имеет вид.

$$\hat{\varphi} = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \tau_n \Psi_n(g) + O(\tau_N). \quad (8.24)$$

Отождествив $F_n \equiv \tau_n$, приходим к тому, что эти решения совпадают.

Таким образом, асимптотический метод функциональных параметров в классе K_2 в условиях применимости метода Фурье приводит к одинаковым решениям с методом Фурье. Однако у асимптотического метода функциональных параметров имеются существенные преимущества в смысле общности по сравнению с методом Фурье.

Идея разделения переменных приводит к постулированию структуры решений вида (8.23), что определенным образом сужает класс решаемых задач, тогда как формализм асимптотического метода формирует структуру в процессе решения (!).

В целом введение расширенной спектральной шкалы дает возможность строить асимптотические решения широкого класса задач, причем, как следует из идеи самой шкалы, асимптотические решения в этом случае состоят из спектральной и регулярных частей, тогда как метод Фурье оперирует только с решениями, разложенными по спектральной шкале.

§ 8.4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим асимптотическое решение в расширенном спектральном классе K_2^2 следующей задачи:

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + f(\varphi, \varphi_x), \quad f(0) = 0; \quad (8.25)$$

$$\varphi = \varphi_0 |_{t=0}, \quad \varphi_x = -b\varphi |_{x=1}, \quad \varphi_x = 0 |_{x=0}.$$

Вводя новую функцию $\Psi = \varphi + c(\tau)$, где $c(\tau)$ — пока неизвестная функция времени, задачу перепишем в виде:

$$\Psi_t = \Psi_{xx} + f(\Psi, \Psi_x, c(\tau)) + c(\tau), \quad (8.26)$$

$$\Psi = \Psi_0 |_{t=0}, \quad \Psi_x = -b\Psi + bc(\tau) |_{x=1}, \quad \Psi_x = 0 |_{x=0}.$$

Будем искать решение в виде разложения по расширенной спектральной шкале оператора

$$\bar{A} = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} = 0 |_{x=0}, \\ \frac{\partial}{\partial x} = b |_{x=1}. \end{cases}$$

Разложение функции $c(\tau)$ возьмем в виде

$$c(\tau) = \tau_1 c_1 + \tau_2 c_2 + \dots + \tau_n c_n + \dots, \quad \tau = e^{\lambda \alpha^t},$$

где λ_n — собственные значения оператора \bar{A} .

Приняв решения в виде

$$\Psi = \Psi_\infty + \tau_1 \Psi_1 + \tau_2 \Psi_2 + \tau_3 \Psi_3 + \dots + \tau_n \Psi_n + O(\tau_{n+1}),$$

для составляющих решения Ψ_n с соответствующим собственным значением λ_n имеем краевую задачу:

$$-\lambda_n \Psi_n = \Psi_{nxx} + f_n + \bar{c}_n, \quad \Psi_{nx} = 0|_{x=0}, \quad \Psi_{nx} = -b\Psi_n + bc_n|_{x=1}.$$

Дифференциальному уравнению удовлетворяют функции Ψ_n вида

$$\begin{aligned} \Psi_n &= A_n \cos \sqrt{\lambda_n} x + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_1^x \sin \sqrt{\lambda_n} (x - x_1) f_n(x_1) dx_1 - \bar{c}_n \frac{\cos \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

По условию $\Psi_{nx} = 0|_{x=0}$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(0) - \int_1^0 \cos \sqrt{\lambda_n} x_1 f_n(x_1) dx_1 + B_n \cos \sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_n} = 0, \quad (8.28)$$

$$B_n = -\frac{f_n(0)}{\lambda_n \cos \sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}} \int_1^0 \cos \sqrt{\lambda_n} x_1 f_n(x_1) dx_1.$$

По граничному условию при $x=1$ получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(1) - A_n \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} + B_n \cos \sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_n} = \\ = -b \left(\frac{\bar{c}_n \cos \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} + A_n \cos \sqrt{\lambda_n} + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} \right) + bc_n. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Условие произвольности A_n дает уравнение для выбора собственных значений оператора \bar{A}

$$\sqrt{\lambda_n} = b \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_n}, \quad (8.30)$$

а из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} f(1) + B_n (\cos \sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_n} - \sin \sqrt{\lambda_n}) = -b \left(\bar{c}_n \frac{\cos \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} - c_n \right)$$

необходимо определить c_n , предварительно выразив их через \bar{c}_n по уравнению задачи (8.26).

В случае

$$f(\varphi, \varphi_x) = f(\varphi_x) \quad \bar{c}(\tau) = \frac{d}{dt} c(\tau), \quad \bar{c}_n = -\lambda_n c_n.$$

В результате константы c_n будут определяться по формуле

$$c_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(1) + B_n (\cos \sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_n} - \sin \sqrt{\lambda_n})}{b(1 + \cos \sqrt{\lambda_n})}. \quad (8.31)$$

Для составляющих решения Ψ_n , которые соответствуют регулярным значениям λ_n , имеем краевую задачу:

$$-\beta_n \Psi_n = \Psi_{nxx} + f_n,$$

$$\Psi_x = 0|_{x=0}, \quad \Psi_{nx} = -b\Psi_n|_{x=1}.$$

Решение этой задачи дается также формулой (8.27) при $\bar{c}_n \equiv 0$. Константа B_n находится по (8.28), а константу c_n следует определить из (8.31).

Таким образом, асимптотическое решение задачи имеет вид

$$\hat{\varphi} = \sum_{n=0}^N [\Psi_n - \tilde{c}_n] \tau_n + O(\tau_{N+1}), \quad (8.32)$$

где

$$\tau_n = e^{-\lambda_n t},$$

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} c_n & \text{для } \lambda_n \text{ — собственных значений,} \\ 0 & \text{для } \beta_n \text{ — несобственных значений.} \end{cases}$$

Чтобы закончить исследование, необходимо выбрать константы A_n из задачи аппроксимации, решение которой для пространства L_2 дает система алгебраических уравнений

$$\int_{-1}^{+1} \left[\varphi_0 - \sum_{n=0}^N (\Psi_n - \tilde{c}_n) \right] \Psi_n dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Пример 2. Рассмотрим асимптотические решения начально-краевой и краевой задач для линейного одномерного уравнения теплопроводности.

1. Краевая задача:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{xx},$$

$$\varphi_x = -b\varphi + c(t)|_{x=1}, \quad \varphi_x = 0|_{x=0};$$

$$c(t) \in C(0 \div \infty).$$

Следуя формализму асимптотического метода, решение задачи будем искать в регулярном классе K_1 со шкалой $\{\tau^n\}$, $\tau = e^{-\beta t}$. Представим $c(t)$ полиномом степени N

$$c(t) = \sum_{n=0}^N c_n \tau^n.$$

Тогда для составляющих решения задачи будут иметь вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi_{0xx} &= 0, & 2) \quad -\beta n \varphi_n &= \varphi_{nxx}, \\ \varphi_{0x} &= 0|_{x=0}, & \varphi_{nx} &= 0|_{x=0}, \\ \varphi_{0x} &= b\varphi_0 + c_0|_{x=1}; & \varphi_{nx} &= -b\varphi_n + c_n|_{x=1}. \end{aligned}$$

Из первой задачи следует $\varphi_0 = c_0/b$, а из последовательности задач

$$\varphi_n = A_n \cos \sqrt{\beta n} x, \quad A_n = -\frac{c_n}{\sqrt{\beta n} \cos \sqrt{\beta n} - \sin \sqrt{\beta n} b}.$$

В этом случае на выбор шкалы сравнения накладывается условие

$$\sqrt{\beta n} \sin \sqrt{\beta n} - b \cos \sqrt{\beta n} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

2. Начально-краевая задача:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{xx},$$

$$\varphi = \varphi_0|_{t=0}, \quad \varphi_x = -b\varphi + c(t)|_{x=1}, \quad \varphi_x = 0|_{x=0}.$$

Решение этой задачи следует искать в расширенном спектральном классе K_2^* . Если $c(t)$ представить в виде полинома по регулярной части шкалы, то для регулярных номеров n в точности получаем решения первой задачи, а для спектральных номеров — задачу

$$-\lambda_n \varphi_n = \varphi_{nxx}, \quad \varphi_{nx} = -b\varphi_n|_{x=1}, \quad \varphi_{nx} = 0|_{x=0},$$

решение которой имеет вид

$$\varphi_n = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} x, \quad \sqrt{\lambda_n} = b \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_n}.$$

Если обозначить через φ^1 асимптотическое решение краевой задачи, то решение начально-краевой задачи будет

$$\hat{\varphi} = \varphi_0^1 + \sum_{n=1}^N A_n \sin \sqrt{\lambda_n} x.$$

Влияние регулярной части решения φ^1 на спектральную $\sum_{n=1}^N A_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$ осуществляется через задачу аппроксимации при $t=0$.

Таким образом, асимптотическое решение начально-краевой задачи состоит из асимптотического решения краевой задачи и асимптотического решения начально-краевой задачи с однородными граничными условиями и начальными данными $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 - \varphi_0^1$.

§ 8.5. Задача Коши для уравнения Лапласа

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xx} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi_t|_{t=0} = \varphi_{t_0}. \quad (8.33)$$

Эта задача для произвольных начальных данных $\{\varphi_0, \varphi_{t_0}\}$ поставлена некорректно [41], но в случае их согласования малые изменения начальных данных приводят при больших t к существенным изменениям решений.

Исследуем эту задачу в регулярном классе K_1 со шкалой $\{\tau^1\}$, $\tau = 1 - e^{-1/t}$, изменив определенным образом формулировку задачи: мы будем рассматривать только стабилизированные решения задачи

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = 0 \quad (8.34)$$

и постараемся выяснить множество начальных данных, приводящих к решениям типа (8.22). Запишем переформулированную задачу таким образом:

$$\varphi_t = u, \quad u_t = -\varphi_{xx}, \quad \varphi|_{t=\infty} = 0. \quad (8.35)$$

В пространстве малого времени она будет иметь вид:

$$\begin{aligned} -\rho(\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= u, \\ \rho(\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \varphi_{xx}, \quad \rho(\tau) = (1 - \tau) \ln^2(1 - \tau), \\ \varphi &= 0|_{t=\infty}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Записывая решение в виде асимптотических рядов

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 \tau + \varphi_2 \tau^2 + \varphi_3 \tau^3 + \dots + O(\tau^{n+1}), \\ u &= u_0 + u_1 \tau + u_2 \tau^2 + u_3 \tau^3 + \dots + O(\tau^{n+1}), \quad \tau = 1 - e^{-1/t} \end{aligned}$$

и принимая разложение $\rho(\tau)$ в виде

$$\rho(\tau) = \sum_{n=2}^N a_n \tau^n + O(\tau^{N+1}),$$

получаем:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0; \quad \varphi_{1xx} = 0, \quad \varphi_{2xx} = 0;$$

$$u_n = - \sum_{p=2}^n a_p (n+1-p) \varphi_{n+1-p}, \quad n \geq 2; \quad (8.37)$$

$$\varphi_{nxx} = \sum_{p=2}^{n-1} a_p (n+1-p) u_{n+1-p}, \quad n \geq 3.$$

Из (8.37) следует $u_2 = -\varphi_1$, $\varphi_{3xx} = 2u_2$, и для первых членов асимптотических разложений имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= B_1 x + A_1, \quad \varphi_2 = B_2 x + A_2, \quad \varphi_3 = -\frac{B_2}{3} x^3 - A_2 x^2 + B_3 x + A_3, \\ u_2 &= -B_2 x + A_2. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Этих членов достаточно для установления правила формирования структуры решения.

Функции φ_n и u_n в соответствии с рекуррентными формулами (8.38) будут иметь вид полиномов по x . Из этого следует, что для больших значений $|x|$ формальные ряды будут расходиться при любом выборе констант $\{A_n, B_n\}$ и рассматриваемое решение будет иметь смысл в интервале $x \in [-1 \div +1]$. Но при структуре функций $\{\varphi_n, u_n\}$ в виде полиномов возникает затруднение при выборе коэффициентов A_n, B_n по начальным данным при $t=0$. Действительно, если при $t=0$ φ_0 задано в виде полинома

$$\varphi_0 = \sum_{n=0}^N D_n x^n,$$

необходимо приравнять члены при одинаковых степенях x в начальных данных и в асимптотическом разложении при $\tau \rightarrow 1$. Но тогда возникает задача разделения начальных значений D_n по коэффициентам A_n, B_n . Эта задача неразрешима для пространства состояний $C^2(\Omega)$, в связи с чем рассмотрим в качестве пространства состояний системы

$$E(\Omega) = C^2(-1 \div +1) \times L_2(I_1), \quad I_1 \subseteq [0 \div 1), \quad \tau \in I_1.$$

Как следует из (8.38), в функции φ_n в каждом новом приближении появляются новые коэффициенты A_n и B_n только при нулевой и первой степени x . Выделим из асимптотических рядов для φ два ряда:

$$\hat{\varphi}_A = \left(\sum_{n=1}^N B_n \tau^n \right) x + O(\tau^{N+1}),$$

$$\hat{\varphi}_B = \sum_{n=1}^N A_n \tau^n + O(\tau^{N+1}).$$

Соответственно по граничным условиям имеем:

$$\varphi_{0A} = D_1 x, \quad \varphi_{0B} = D_0.$$

Теперь можно записать две задачи аппроксимации:

$$\rho_A^*(\varphi_{0A}, \hat{\varphi}_A) = \min_{A_n} \rho_{L_2} \left(D_1, \sum_{n=1}^N B_n \tau^n \right),$$

$$\rho_B^*(\varphi_{0B}, \hat{\varphi}_B) = \min_{B_n} \rho_{L_2} \left(D_0, \sum_{n=1}^N A_n \right).$$

Для пространства $L_2(I_1)$ решение этих задач дает система линейных алгебраических уравнений

$$\int_0^1 \left(\bar{D} - \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \tau^n \right) \tau^k d\tau = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (8.39)$$

или

$$\sum_{n=1}^N \frac{k \bar{c}_n}{(n+k)} = \bar{D}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$\bar{D} = \begin{cases} D_0, \\ D_1; \end{cases} \quad \bar{c}_n = \begin{cases} A_n, \\ B_n. \end{cases}$$

Итак, произвольным образом в начальных данных могут быть заданы только коэффициенты $\{D_0, D_1\}$, остальные коэффициенты D_n связаны с ними в силу системы (8.39) и рекуррентных соотношений.

Таким образом, в рассматриваемой задаче начальные данные должны иметь вид

$$\varphi_0 = D_0 + D_1 x + \sum_{n=2}^N F_n(D_0, D_1) x^n.$$

Отметим также, что начальные данные u_0 должны быть согласованы с φ_0 , кроме того, в решении совершенно не используется информация о u_0 , поэтому в задаче надо задавать только φ_0 .

З а м е ч а н и е. Выше были рассмотрены стабилизированные решения типа (8.34), но поставленная задача разрешима и для стабилизированных решений типа

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = A_0 + B_0 x.$$

Для этого типа решений в системе алгебраических уравнений (8.39) \bar{D} будет иметь вид

$$\bar{D} = \begin{cases} D_0 - A_0, \\ D_1 - B_0. \end{cases}$$

Резюме. Задача

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xx} = 0, \quad x \in (-1 \div +1), \quad t \in [0 \div \infty),$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi = A_0 + B_0 x$$

имеет асимптотические решения в регулярном классе корректности K_1 со шкалой $\{\tau^i\}$, $\tau = 1 - e^{-t}$ и пространством состояний $E(\Omega) = C^2(-1 \div +1) \times L_2(I_1)$ с начальными данными вида

$$\varphi_0 = D_0 + D_1 x + \sum_{n=2}^k F_n(D_0, D_1) x^n.$$

§ 8.6. Связь с методом Бергмана

Асимптотический метод решения задач математической физики на компактных классах предельной корректности имеет некоторую аналогию с методом Бергмана [15].

В методе Бергмана решения эллиптических уравнений конструируются в виде некоторого ряда с первым членом, представляющим решение уравнения Лапласа. Для конкретного решения уравнения Лапласа ряд Бергмана зависит от набора констант, появляющихся в высших приближениях (см. разложение (8.24)), для выбора которых в методе не существует формализма.

Таким образом, в методе единственное решение уравнения Лапласа (присоединенного уравнения) порождает многообразие решений общего эллиптического уравнения. При постановке краевых задач для общего эллиптического уравнения и их решения методом Бергмана это обстоятельство приводит к проблеме выбора констант ряда Бергмана.

Для малого числа приближений эти константы можно выбирать исходя из физических соображений, однако для организации регулярного процесса решения с произвольным числом итераций необходимо конструктивное решение проблемы.

Для решения этой проблемы нужна вторая предельная задача (некорректная в предельном смысле), на которую и следует замкнуть решение по методу Бергмана через задачу аппроксимации. Этот прием для ряда задач гидродинамики описан нами в [63].

§ 8.7. Нелинейная задача нестационарного теплообмена и фильтрации¹

Обычно при рассмотрении задач нестационарного теплообмена предполагается, что теплофизические характеристики вещества постоянны. Однако если температура вещества изменя-

¹ Этот параграф написан по материалам статьи М. Н. Борисюк [19].

ется в широких пределах, то необходимо учитывать зависимость теплофизических характеристик от температуры. Это приводит к нелинейному уравнению теплопроводности, точное решение которого получить не удается. С такими же уравнениями сталкиваются также в теории нестационарной фильтрации.

В настоящем параграфе с помощью асимптотического метода функциональных параметров решается нелинейная задача нестационарного теплообмена в случае линейной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры.

Итак, имеем начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] \quad (8.40)$$

$$(t > 0, -R \leq x \leq +R), \quad a(T) = \frac{a_0}{T_c} T(x, t);$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad T(R, t) = T_c, \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (8.41)$$

Переходя к безразмерному виду, задачу перепишем так:

$$\frac{\partial \bar{T}(\bar{x}, Fo)}{\partial Fo} = \left[\frac{\partial \bar{T}(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}} \right]^2 + \bar{T}(\bar{x}, Fo) \frac{\partial^2 \bar{T}(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}^2} \quad (8.42)$$

$$(Fo > 0, -1 < \bar{x} < 1);$$

$$\bar{T}(\bar{x}, 0) = T_0(\bar{x}), \quad \bar{T}(1, Fo) = 1, \quad \frac{\partial \bar{T}(0, Fo)}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (8.43)$$

где

$$\bar{T} = T/T_c, \quad \bar{x} = x/R, \quad Fo = a_0 t/R^2,$$

а черточки над безразмерными величинами для удобства опущены.

Представим решение в виде асимптотического разложения по расширенной спектральной шкале (см. § 8.1, 8.2)

$$T(x, Fo) = T_\infty(x) + \tau_1 T_1(x) + \tau_2 T_2(x) + \dots + O(\tau_n), \quad (8.44)$$

где $\tau_n = e^{-q_n Fo}$, а параметры q_n будут выбраны в процессе решения задачи.

Подставив формальное решение (8.44) в уравнение (8.42) и принимая во внимание граничные условия, получаем рекуррентные краевые задачи для составляющих $T_n(x)$ асимптотического разложения:

$$T_{\infty x}^2(x) + T_\infty(x) T_{\infty xx}(x) = 0, \quad (8.45)$$

$$T_\infty(1) = 1, \quad \frac{dT_\infty(0)}{dx} = 0;$$

$$-q_n T_n(x) = T_{nxx}(x) + f_n(T_{n-1}, \dots, T_\infty, T_{n-1x}, \dots, T_{\infty x}, T_{n-1xx}), \quad (8.46)$$

$$T_n(1) = 0, \quad \frac{dT_n(0)}{dx} = 0.$$

Когда $f_n = 0$, краевая задача (8.46) переходит в классическую задачу Штурма — Лиувилля (задачу о собственных значениях).

Решение первой задачи $T_\infty = 1$. При $n=1$, $f_1 = 0$ и q_1 принимаем равным первому собственному значению $\lambda_1 = (\pi/2)^2$ задачи Штурма — Лиувилля, а соответствующую этому собственному значению собственную функцию берем за первую компоненту асимптотического разложения

$$T_1(x) = A_1 \cos \frac{\pi}{2} x. \quad (8.47)$$

Поскольку при подстановке разложения (8.44) в уравнение из-за нелинейности этого уравнения в правой части появляются члены вида

$$A_n(x) \tau_n^2, \quad A_m(x) \tau_{n-1} \tau_n,$$

то последующий выбор параметров q_n должен быть таким:

$$q_2 = 2\lambda_1, \quad q_3 = 3\lambda_1, \quad q_4 = 4\lambda_1, \dots$$

Нами получены решения краевой задачи (8.46) для первых четырех приближений $T_n(x)$. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= -\frac{A_1^2}{2} \left[\cos \pi x + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{2} \frac{\pi}{2} x\right)} \cos \sqrt{2} \frac{\pi}{2} x \right], \\ T_3(x) &= -\frac{A_1^3}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} x - 3 \cos \frac{3}{2} \pi x + \frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(\sqrt{2} \frac{\pi}{2} x\right)} \times \right. \\ &\times \left[(3 - 2\sqrt{2}) \cos \frac{\pi}{2} (1 - \sqrt{2}) x - (3 + 2\sqrt{2}) \cos \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}) x \right] - \\ &\left. - \frac{6}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{2} \frac{\pi}{2} x\right)}{\cos\left(\sqrt{3} \frac{\pi}{2} x\right)} \cos\left(\sqrt{3} \frac{\pi}{2} x\right) \right\}, \quad (8.48) \\ T_4(x) &= \frac{A_1^4}{8} \left\{ \frac{1}{2} \pi x \sin \pi x + \frac{40}{21} \cos \pi x - \frac{8}{3} \cos 2\pi x + \right. \\ &+ \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{2} \frac{\pi}{2} x\right)} [\cos \pi x - \cos \sqrt{2} \pi x] + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{2} \frac{\pi}{2} x\right)} \left[2 \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{2} x - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{25-18\sqrt{2}}{8-2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{2})x - \frac{25+18\sqrt{2}}{8+2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{2})x \Big] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\sqrt{3}\frac{\pi}{2}\right)} \left[(2\sqrt{3}-3)\cos\frac{\pi}{2}(1-\sqrt{3})x - \right. \\
& \left. - (2\sqrt{3}+3)\cos\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{3})x + 4\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi x \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Начальное условие $T_0(x)$ позволит нам определить константу A_1 из задачи аппроксимации

$$\int_0^1 [T_0(x) - T(x, 0)] \cos\frac{\pi}{2} x dx = 0. \quad (8.49)$$

Ограничиваясь четырьмя членами приближения, из условия (8.49) получаем алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно A_1 :

$$0,0717 A_1^4 + 0,1706 A_1^3 + 0,4244 A_1^2 + A_1 + C = 0, \quad (8.50)$$

где

$$C = \alpha \int_0^1 T_0(x) \cos\frac{\pi}{2} x dx - \frac{4}{\pi}.$$

Пусть начальное распределение температуры $T_0(x) = x^2$. Тогда, поскольку все корни уравнения (8.50) оказываются комплексными, A_1 берем равным тому корню кубического уравнения (три члена разложения), который ближе всего к линейному значению.

Поскольку из-за громоздкости вычислений мы ограничились четырьмя приближениями, то для малых значений Fo следует ожидать большую погрешность в расчетах, при $Fo > 0,4$ эта погрешность практически сходит к нулю.

Обобщим полученные результаты на случай нелинейного уравнения теплопроводности (8.40) с граничными условиями третьего рода:

$$\begin{aligned}
T(x, 0) &= T_0(x), \\
-\lambda \frac{\partial T(R, t)}{\partial x} + \alpha [T_c - T(R, t)] &= 0, \\
\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned} \quad (8.51)$$

Пусть $T_c > T_0(x)$. Сведем задачу на нагревание к задаче на охлаждение путем замены переменной

$$T_c - T(x, t) = \varphi(x, t)$$

и перейдем к безразмерному виду

$$\frac{\partial \varphi(x, Fo)}{\partial Fo} = (1 - \varphi(x, Fo)) \frac{\partial^2 \varphi(x, Fo)}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial \varphi(x, Fo)}{\partial x} \right]^2, \quad (8.52)$$

$$\varphi(x, 0) = 1 - T_0(x) = \varphi_0(x),$$

$$\frac{\partial \varphi(1, Fo)}{\partial x} + Bi \varphi(1, Fo) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(0, Fo)}{\partial x} = 0. \quad (8.53)$$

Как и в случае граничных условий первого рода, решение ищем в виде ряда

$$\varphi(x, Fo) = \varphi_\infty(x) + \varphi_1(x) \tau_1 + \varphi_2(x) \tau_2 + \dots + O(\tau_n), \quad (8.54)$$

где

$$\tau_n = e^{-q_n Fo}$$

После подстановки разложения (8.54) в уравнение (8.52), учитывая граничные условия (8.53), получаем рекуррентные краевые задачи для составляющих $\varphi_n(x)$. Выбор параметров q_n производим, как и в предыдущем случае. Первые три приближения $\varphi_n(x)$ получаются такими:

$$\varphi_1(x) = A_1 \cos \sqrt{\lambda_1} x,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{A_1^2}{2} (\cos 2 \sqrt{\lambda_1} x - k \cos \sqrt{2\lambda_1} x),$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) = & -\frac{A_1^3}{8} \left\{ \cos \sqrt{\lambda_1} x - 3 \cos 3 \sqrt{\lambda_1} x - \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} k x \right. \\ & \times \cos [\sqrt{\lambda_1} (1 - \sqrt{2}) x] + \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} k \cos [\sqrt{\lambda_1} (1 + \sqrt{2}) x] - \\ & \left. - 2(2k - 1) \cos \sqrt{3\lambda_1} x \right\} + C_1 \cos \sqrt{3\lambda_1} x + C_2 \sin \sqrt{3\lambda_1} x, \end{aligned}$$

где

$$k = \frac{2 \sqrt{\lambda_1} \sin 2 \sqrt{\lambda_1} - Bi \cos 2 \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{2\lambda_1} \sin \sqrt{2\lambda_1} - Bi \cos \sqrt{2\lambda_1}},$$

C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$\varphi_{3x}(1, Fo) + Bi \varphi_3(1, Fo) = 0, \quad \varphi_{3x}(0, Fo) = 0,$$

а константа A_1 — из условий аппроксимации.

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА УСКОРЕНИЙ

(МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ
В ТЕОРИИ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ
НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ)

§ 9.1. Общие сведения

Интересным объектом с точки зрения теории предельной корректности является теория потенциала ускорений. В основном эта теория изучает задачи движения тела в жидкости или газе с образованием вихревых возмущений за телом. Как правило, задачи рассматриваются в рамках теории малых возмущений, что приводит к явлениям локальной некорректности (см. гл. 3). Последние в свою очередь обуславливают появление сингулярных решений, изучению которых в основном посвящена теория потенциала ускорений, характеризующаяся богатством приложений. Эти приложения определили ее бурное развитие в последние годы.

Метод функциональных параметров получил должное обоснование, развитие и апробацию в задачах гидродинамики подводного крыла и теории потенциала ускорений.

Как правило, формализм теории потенциала ускорений сводит краевые задачи математической физики к сингулярным интегральным уравнениям с ядром, зависящим от некоторого физического параметра.

Анализ предельных уравнений при стремлении параметра к своим предельным значениям показывает, что одна из предельных моделей обладает структурной некорректностью (см. гл. 3).

Таким образом, наиболее типичными некорректностями в теории потенциала ускорений являются:

- а) локальная некорректность, вызываемая упрощением математической модели;
- б) структурная некорректность, связанная со свойствами интегральных уравнений.

Локальная некорректность в задачах теории потенциала ускорений рассмотрена в главе 3. Явления структурной некорректности достаточно обстоятельно изучены в работах [62, 63]. Однако в них совершенно не рассматривался вопрос об уровнях корректности, и в свете настоящей монографии наибольший интерес представляют задачи теории потенциала ускорений, в которых затрагивается этот вопрос. В связи с этим в § 8.3—8.6,

9.1—9.4 представлены только задачи, интересные с точки зрения уровней корректности. Из этого класса задач мы рассматриваем задачи о движении крыла в аperiodическом нестационарном потоке жидкости, которые были предметом многочисленных исследований, и в настоящее время достаточно хорошо развита теория движения крыла в плоском нестационарном потоке. Из наиболее строгих теорий этого плана следует указать теорию Л. И. Седова [90]. Существенно меньшее развитие получила теория движения крыла конечного размаха в аperiodическом потоке. В этом случае задача сводится к двумерным сингулярным интегральным уравнениям, теория которых далека от завершения (даже в смысле построения точных решений некоторых характерных типов двумерных интегральных уравнений). Это привело к тому, что после получения двумерных сингулярных интегральных уравнений дальнейшие исследования выполняются или по пути развития численных методов, или по пути внесения одномерных аппроксимаций. Последние переводят двумерные сингулярные интегральные уравнения в одномерные сингулярные интегродифференциальные уравнения, открывая таким образом возможности для продолжения анализа.

В задачах движения крыла в аperiodическом нестационарном потоке в качестве параметра следует рассмотреть время и изучить эволюцию системы на временном интервале $I \subset [0; \infty)$. При такой постановке задачи оказывается законным вопрос о построении асимптотических решений методом пространства малого времени.

Сформулировав цель, мы должны ответить на вопрос: возможно ли построение асимптотических решений краевых задач (моделей первого уровня) со шкалой метода пространства малого времени $\{\tau^\alpha\}$, $\tau = 1 - e^{-q^t}$. Из результатов главы 6 следует, что это возможно в некоторых случаях, когда пространство состояний системы есть $C^\infty(\Omega)$ (Ω — область, занятая жидкостью).

Как отмечено выше, математические модели теории потенциала ускорений имеют области локальной некорректности, поэтому гидродинамические потенциалы скоростей ϕ и ускорений θ принадлежат пространству $C^\infty(\Omega)$ почти всюду, за исключением счетного множества точек локальной некорректности.

Наличие точек локальной некорректности приводит к отрицательному ответу на поставленный вопрос.

Итак, мы приходим к первому важному результату: в математических моделях теории крыла в нестационарном потоке первого уровня в классе предельной корректности $K_1 = \{C^\infty(\Omega), \{\tau^\alpha\}, I\}$ предел $t \rightarrow 0$ является некорректным.

В соответствии с постулатом корректности (см. гл. 3) необходимо изучать предел $t \rightarrow \infty$. При условии существования стабилизированных режимов (см. § 7.11, 7.12, 8.1, 8.2) оказывается возможным построение асимптотических решений в том же классе корректности, но со шкалой $\{\tau^\alpha\}$, $\tau = 1 - e^{-q^t}$. Формализм этих

решений был развит в работах [2, 37, 38], и на основе этого формализма были получены решения некоторых конкретных задач с реализацией алгоритмов на ЭВМ.

В этом цикле работ был развит асимптотический метод первого уровня корректности. Однако этот метод имел определенные недостатки, в связи с чем потребовались дополнительные исследования, основанные на идее перехода на второй уровень корректности. Напомним, что при переходе на второй уровень корректности, как правило, происходит перестановка корректного и некорректного пределов.

Недостатки асимптотического метода первого уровня связаны главным образом с существом исходной идеи, заложенной в его основу.

1. В методе в качестве нулевого приближения рассматриваются стабилизированные решения, что существенно сужает класс задач.

2. Из физического существа дела следует, что для определения гидродинамических характеристик крыла при аперриодических движениях, начавшихся в момент времени $t=0$, для момента $t=t_1$ достаточно знания только прошлой траектории движения крыла. И, вообще говоря, при организации динамических расчетов летательных аппаратов у нас отсутствует информация о траектории крыла в будущем, тогда как в методе необходимо знание траектории на всем временном интервале $t \in (0 \div \infty)$. В связи с этим метод будет неудобен при организации динамических расчетов летательных аппаратов, за исключением случая траекторных расчетов типа взлета и посадки.

3. Эффекты нестационарности наиболее существенны в начальные периоды времени движения крыла, тогда как соответствующие асимптотические решения в этой области или должны включать слишком большое число приближений, или будут наименее достоверными.

Переход к модели второго уровня оказался возможным на основе метода разделения решений, развитого автором для задач о колебании крыла в потоке жидкости [63]. Обобщение этого метода на задачи движения крыла в аперриодическом потоке осуществлено А. Н. Панченковым и Т. Н. Яковлевой в работе [84]. Более подробные сведения по теории потенциала ускорений читатель найдет в нашей монографии [63].

§ 9.2. Постановка задачи об аперриодическом движении несущей поверхности в жидкости

Рассмотрим аперриодическое движение (нестационарное) несущей поверхности произвольной геометрии в несжимаемой жидкости, начинающееся в момент времени $t=0$. Полагаем, что до момента $t=0$ несущая поверхность движется без возмущений с некоторой горизонтальной скоростью $V_x=1$, а начиная с момен-

та времени $t=0$, она вносит возмущения в поток путем изменения нормальной скорости на некоторую малую величину в пределах значений, принятых в теории малых возмущений.

В пространстве потенциала ускорений соответствующая начально-краевая задача имеет формулировку (рис. 4):

$$1) \Delta\theta = 0, \quad g \in \Omega,$$

$$\theta_n = F(g, t), \quad g \in S_p; \quad [\theta] = 0, \quad g \in L;$$

$$P\theta = 0, \quad g \in S_h; \quad \theta = 0, \quad t \leq 0,$$

где S_p — проекция поверхности S на поверхность, проходящую через среднее сечение поверхности S и движущуюся в жидкости без возмущения; L — выходящая кромка поверхности S ; S_h — ограничивающая поверхность.

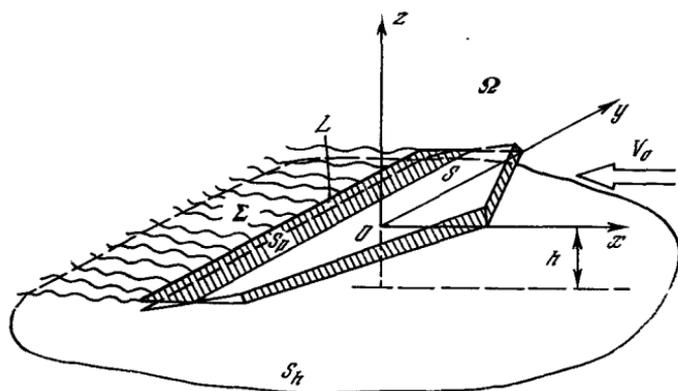


Рис. 4

Дополнительно для связи решений в пространствах потенциала ускорения и скоростей заданы соотношение

$$\theta = -\varphi_x + \varphi_t \quad (9.1)$$

и граничные условия

$$\varphi_n = F_1(g, t), \quad g \in S_p. \quad (9.2)$$

В силу этих условий функция $F(g, t)$ в задаче 1 определяется через $F_1(g, t)$:

$$F(g, t) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) F_1(g, t). \quad (9.3)$$

§ 9.3. Формализм асимптотического метода первого уровня корректности

Решение задачи 1 дает оператор $A\gamma$ (см. гл. 5).

Граничное условие на поверхности S_p приводит к интегральному уравнению

$$\bar{A}_z\gamma = F(g_1), \quad g_1 \in S_p \times I. \quad (9.4)$$

Анализ уравнения такого типа показывает (см. гл. 3), что его ядро имеет расходящуюся особенность и интегральный оператор $\bar{A}_z\gamma$ существует только для $\gamma \in C_0^1(S_p)$, тогда как есть сингулярные решения задачи, определение которых в пространстве потенциала θ невозможно в связи с тем, что оператор $N^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$, осуществляющий отображения $\varphi \rightarrow \theta$, приводит к потере сингулярного решения.

Полное решение задачи может быть получено из интегрального уравнения

$$N\bar{A}_z\gamma = F_1(g_1), \quad g_1 \in S_p \times I, \quad (9.5)$$

но (9.5) имеет заранее неизвестную структуру и основные затруднения теории связаны с построением его в явном виде.

В пространстве малого времени решение задачи 1 и соответствующей задачи для потенциала φ можно искать в виде:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \tau_1\theta_1 + \tau_1^2\theta_2 + \tau_1^3\theta_3 + \dots + O(\tau_1^N), \\ \varphi &= \varphi_0 + \tau_1\varphi_1 + \tau_1^2\varphi_2 + \tau_1^3\varphi_3 + \dots + O(\tau_1^N), \\ \tau_1 &= 1 - e^{-t/q}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

но в задаче Коши и в начально-краевых задачах для уравнений в частных производных функции $\{\varphi_i, \theta_i\}$ должны принадлежать пространству $C^\infty(\Omega)$. Это ограничение в рассматриваемой задаче существенно, поскольку оно в прямом алгоритме метода пространства малого времени приведет к потере сингулярного решения. Возникшее затруднение можно преодолеть следующим образом.

При $t \rightarrow \infty$ краевая задача 1 переходит в задачу:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 0, & g \in \Omega, & \quad \theta \in C^2(\Omega); \\ \theta_z &= F_{1\infty}(g), & g \in S_p; & \quad \theta_+ - \theta_- = 0, \quad g \in L. \end{aligned}$$

Поскольку граничные условия этой задачи и свойства оператора $A\gamma$ единственным образом определяют $\theta_\infty = \theta_{t \rightarrow \infty}$, то теперь, применив преобразование времени $t = 1/t_1$, можно сформулировать новую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 0, & g \in \Omega, & \quad \theta \in C^2(\Omega); \\ \theta_z &= F_2(g_2), & g_2 \in S_p \times I; & \quad \theta_+ - \theta_- = 0, \quad g \in L, \end{aligned}$$

где

$$F_2(g_2) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} - I_1^2 \frac{\partial}{\partial t_1} \right) F(g_2).$$

В пространстве малого времени она будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 0, & g \in \Omega, & & \theta \in C^2(\Omega); \\ \theta_z &= F_2(g_2), & g_2 \in S_p \times I_1, & & I_1 \subseteq [0 \div 1]; \\ \theta_+ - \theta_- &= 0, & g \in L, & & \end{aligned} \quad (9.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_2(g_2) &= \left[-\frac{\partial}{\partial x} - \rho(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] F(g_2), \\ \tau &= 1 - e^{-t_1/q}, & \rho(\tau) &= q(1 - \tau) \ln^2(1 - \tau), \end{aligned}$$

причем

$$\theta = -\varphi_x - \rho(\tau) \varphi_\tau.$$

Решение этой задачи можно искать в виде:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \tau\theta_1 + \tau^2\theta_2 + \tau^3\theta_3 + \dots + O(\tau^N), \\ \varphi &= \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \tau^2\varphi_2 + \tau^3\varphi_3 + \dots + O(\tau^N), \end{aligned} \quad (9.8)$$

причем функции

$$\{\varphi_i, \theta_i\} \in C^2(\Omega), \quad \{\bar{\varphi}_{ix}, \bar{\theta}_i\} \in L_1(S_p),$$

где $\{\bar{\varphi}, \bar{\theta}\}$ — их значения на поверхности S_p . Это следует из того, что $\rho(\tau) \sim O(\tau^2)$ и рекуррентные соотношения для φ_i определяются формулой

$$\varphi = - \int_{-\infty}^x [\theta + \rho(\tau) \varphi_\tau] d\xi. \quad (9.9)$$

Из формул (9.8) и (9.9) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= - \int_{-\infty}^x (\theta_n^1 + \Psi_n) d\xi, \\ \Psi_n &= \sum_{p=2}^n A_p \varphi_{n+1-p} (n+1-p), & \rho(\tau) &= \sum_{p=2}^{\infty} A_p \tau^p. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Следует иметь в виду, что ряд (9.8) для θ содержит полное значение потенциала ускорений, включая сингулярную составляющую, а в рекуррентной формуле (9.10) через θ_n^1 обозначены решения задач:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_n^1 &= 0, & g \in \Omega, & & \theta_n^1 \in C^2(\Omega); \\ \theta_{nz}^1 &= F_{2n}(g), & g \in S_p; & & \theta_{n+}^1 - \theta_{n-}^1 = 0, & g \in L, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где

$$F_2(g_2) = \sum_{n=0}^N F_{2n} \tau^n.$$

Если

$$F(g_2) = \sum_{n=0}^N F_n \tau^n,$$

то

$$F_{2n}(g) = -\frac{\partial}{\partial x} F_n - B_n(g), \quad (9.12)$$

$$B_n(g) = \sum_{p=2}^n A_p (n+1-p) F_{n+1-p}(g).$$

Решение задачи (9.11) запишем в виде

$$\theta_n^1 = \theta_n^{11} + \theta_n^{12},$$

причем

$$\theta_{nz}^1 = -\partial F_n / \partial x, \quad \theta_{nz}^{12} = -B_n(g), \quad g \in S_p.$$

Пусть

$$\theta_n^{11} = A\gamma_n^1, \quad \gamma_n^1 \in L_1(S_p),$$

$$\theta_n^{12} = A\gamma_n^2, \quad \gamma_n^2 \in C_0^1(S_p).$$

Тогда для определения γ_n^i получаем уравнения:

$$L\gamma_n^1 = F_n(g), \quad g \in S_p; \quad (9.13)$$

$$L_0\gamma_n^2 = B_n(g), \quad g \in S_p, \quad (9.14)$$

где

$$\gamma^{21} = \partial\gamma^2/\partial\xi, \quad L\gamma = -\int_{-\infty}^x \bar{A}_z \gamma d\xi, \quad L_0\gamma = -\int \bar{A}_z \gamma d\xi,$$

причем в плоских задачах $L_0\gamma = L\gamma$.

Дальнейший алгоритм решения задачи ясен; необходимо решить уравнения (9.13) и (9.14), а затем по рекуррентной формуле (9.10) определить φ_n . Вихревая и инерционная составляющие коэффициента подъемной силы определяются по формулам:

$$C_{yB} = -\int_{-1}^{+1} (\bar{\varphi}_{x+} - \bar{\varphi}_{x-}) dx,$$

$$C_{yH} = -\int_{-1}^{+1} (\bar{\theta}_+^{12} - \bar{\theta}_-^{12}) dx.$$

§ 9.4. Плоская задача об аperiodических движениях тонкого крыла

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу о движении тонкого крыла в безграничной жидкости. Оператор $A\gamma$ в этой задаче имеет известный вид (см. [63]). Соответствующие этому оператору уравнения (9.13) и (9.14) можно записать так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n^1}{x-s} ds = F_n(x),$$

$$\frac{1}{2\pi^1} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n^{21}}{x-s} ds = B_n(x), \quad x \in [-1 \div 1].$$

Решения этих уравнений даются формулами обращения интеграла Коши:

$$\gamma_n^1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} \frac{F_n(p)}{p-s} dp,$$

$$\gamma_n^{21} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-p^2} \frac{B_n(p)}{p-s} dp.$$

Рассмотрим простейший случай изменения нормальной скорости φ_y :

$$\varphi_y = (1-\tau)F(x), \quad g \in S_p.$$

Для принятого закона изменения φ_y удобно несколько изменить алгоритм, положив $\varphi = (1-\tau)\varphi^1$.

Пусть φ^1 представляется также рядом типа (9.8), тогда для φ будет справедлива рекуррентная формула

$$\varphi_n^1 = \varphi_{n-1}^1 - \int_{\infty}^x (\theta_n^1 + \Psi_n^1) dS,$$

где

$$\Psi_n^1 = \sum_{p=2}^n [\bar{A}_p \varphi_{n+1-p}^1 (n+1-p) - A_p \varphi_{n-p}^1],$$

$$\bar{\rho}(\tau) = \rho(\tau)(1-\tau) = \sum_{p=2}^{\infty} A_p \tau^p.$$

Для $C_{yв}$ получим:

$$C_{yв} = -2\Psi \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} F(p) dp,$$

$$\Psi = (1-\tau) \left[1 - q\tau^2 - q \left(1 + \frac{3}{2} q \right) \tau^3 + O(\tau^4) \right].$$

При вычислении предельных значений φ_n было использовано свойство операторов $A\gamma$.

Если

$$\theta_n^1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma_n(\xi) G[(x-\xi), (y-\eta)] d\xi,$$

то

$$\begin{aligned} \varphi_n = & - \int_{\infty}^x \theta_n^1 d\xi = - \frac{1}{2\pi} \int_1^x \gamma_n(s) ds \int_{\infty}^x G[(x-\xi), (y-\eta)] \Big|_{-1}^{+1} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_1^{\xi} \gamma_n(s) ds G[(x-\xi), (y-\eta)] d\xi, \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} G[(x-\xi), (y-\eta)] &= \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \\ \int_x^x G d\xi &= \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y-\eta} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad y-\eta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и тогда

$$\varphi_{n+} - \varphi_{n-} = - \int_1^{\xi} \gamma_n(s) ds.$$

Инерционная составляющая коэффициента подъемной силы $C_{yи}$ может быть непосредственно определена из краевой задачи в замкнутом виде.

Действительно, имеем

$$\theta_y^{12} = -\rho(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} F(g_2)$$

и, записывая уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma^{21}}{x-s} ds = \rho(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} F(g_2).$$

получаем:

$$\gamma^{21} = \frac{2\rho(\tau)}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-p^2}}{p-s} \frac{\partial}{\partial \tau} F(p) dp,$$

$$C_{y_{\text{н}}} = -2\rho(\tau) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-p^2} \frac{\partial}{\partial \tau} F(p) dp.$$

В рассматриваемом примере

$$C_{y_{\text{н}}} = 2\rho(\tau) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-p^2} F(p) dp.$$

В случае тонкой пластины в формулах для $C_{y_{\text{в}}}$ и $C_{y_{\text{н}}}$ следует положить $F(p) = -\alpha$, а в случае дужки — $F(p) = \beta p$.

Эта задача изучена А. Г. Костиным [36] для произвольного закона изменения вертикальной скорости вида

$$\varphi_y = \sum_{n=0}^M D_n F(x) \tau^n. \quad (9.15)$$

Для принятого закона изменения вертикальной скорости (9.15) им реализован алгоритм определения гидроаэродинамических характеристик на ЭВМ БЭСМ-4.

Для

$$\varphi_y = (D_0 + D_1\tau + D_2\tau^2 + D_3\tau^3 + D_4\tau^4) F(x)$$

задача им развита до получения аналитических формул для C_y и C_m . В частности, формула для вихревой составляющей коэффициента подъемной силы имеет вид

$$C_{y_{\text{в}}} = -2\Psi_{\text{в}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} F(p) dp, \quad \Psi_{\text{в}} = \sum_{n=0}^{N=7} R_n \tau^n,$$

где

$$R_0 = D_0,$$

$$R_1 = D_1,$$

$$R_2 = qD_1 + D_2,$$

$$R_3 = \frac{3}{2}q^2D_1 + 2qD_2 + D_3,$$

$$R_4 = \left(-\frac{1}{12}q + \frac{5}{2}q^3\right)D_1 + \frac{9}{2}q^2D_2 + 3qD_3 + D_4,$$

$$R_5 = \left(-\frac{1}{12}q - \frac{3}{8}q^3 + \frac{35}{4}q^4\right)D_1 + \left(-\frac{1}{6}q + 10q^3\right)D_2 + 9q^2D_3 + 4qD_4,$$

$$R_6 = \left(-\frac{13}{180}q - \frac{7}{16}q^2 - \frac{5}{4}q^3 + \frac{63}{8}q^5 \right) D_1 + \left(-\frac{1}{6}q - q^2 + \frac{175}{8}q^4 \right) D_2 + \left(-\frac{1}{4}q + 25q^3 \right) D_3 + 15q^2 D_4,$$

$$R_7 = \left(-\frac{11}{180}q - \frac{83}{240}q^2 - \frac{5}{3}q^3 - \frac{175}{48}q^4 + \frac{231}{16}q^6 \right) D_1 + \left(-\frac{13}{90}q - \frac{9}{8}q^2 - \frac{25}{12}q^3 + \frac{189}{4}q^5 \right) D_2 + \left(-\frac{1}{4}q - \frac{45}{44}q^2 - \frac{25}{12}q^3 + \frac{525}{8}q^4 \right) D_3 + \left(-\frac{1}{3}q + 50q^3 \right) D_4.$$

Обычным путем формализм решения плоских задач распространяется на задачу движения крыла вблизи экрана. Соответствующее исследование выполнено А. Г. Костиным. Специфика формализма в этой задаче начинается с выбора оператора $A\gamma$. В задаче о крыле вблизи экрана для оператора $A\gamma$ уравнения (9.13) и (9.14) реализуются в форме:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma_n^1(s) \left[\frac{1}{x-s} + \operatorname{sign} F \frac{x-s}{(x-s)^2 + 16\bar{h}^2} \right] ds = F_n(x),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma_n^{21}(s) \left[\frac{1}{x-s} + \operatorname{sign} F \frac{x-s}{(x-s)^2 + 16\bar{h}^2} \right] ds = B_n(x),$$

$$x \in (-1 \div 1),$$

$$\operatorname{sign} F = \begin{cases} -1 & \text{— крыло вблизи экрана,} \\ 1 & \text{— подводное крыло.} \end{cases}$$

Решение этих интегральных уравнений ищется методом функциональных параметров:

$$\gamma = \gamma_0 + \tau_1 \gamma_1 + \tau_1^2 \gamma_2 + \tau_1^3 \gamma_3 + \dots + O(\tau_1^N),$$

$$\gamma \in \{\gamma_n^{21}, \gamma_n^2\}, \quad \tau_1 = \sqrt{1 + 4\bar{h}^2} - 2\bar{h}.$$

Таким образом, в задаче апериодического нестационарного движения крыла вблизи экрана реализуется формализм решения в виде двойных асимптотических рядов

$$\theta = \sum_{n,m} \tau^n \tau_1^m \theta_{nm} + O(\tau^N, \tau_1^N).$$

Это решение доведено А. Г. Костиным до алгоритма вычисления гидроаэродинамических характеристик крыла в нестационарном апериодическом потоке вблизи экрана, реализованного на языке АЛГОЛ-60.

§ 9.5. Формализм метода разделения решений

Как видно из вышеизложенного, математическая модель первого уровня корректности, заданная в виде задачи 1, оказалась некорректной относительно предела $t=0$. Это привело к определенным осложнениям в развитии асимптотического метода задачи 1, поскольку асимптотические решения с корректным пределом $1/t \rightarrow 0$ оказываются недостаточно удовлетворительными в области малых значений t .

Для устранения недостатков асимптотического метода первого уровня корректности в работе [84] было выполнено исследование, основанное на идее перехода модели второго уровня корректности. Этот переход осуществляется с помощью метода разделения решений, развитого автором для задач теории колебания несущей поверхности [66, 70, 71].

Идея разделения решений возникли в результате как физического, так и формально-математического существа дела. Физический анализ явлений, сопровождающих нестационарное движение крыла, показывает, что в этом случае общие усилия, действующие на крыло, содержат составляющие различной природы, а именно: усилия инерционной природы и усилия, связанные с вихревыми движениями жидкости. Последнюю составляющую усилий можно представить в виде двух компонент: квазистационарного усилия и усилия, связанного с наличием вихревого следа за крылом.

Аналогичный физический анализ справедлив и для гидродинамических потенциалов скоростей и ускорений.

Разделение общего решения на составляющие оказывается полезным при математическом анализе задачи в связи с тем, что оно дает возможность упростить математический аппарат теории. В литературе известно несколько способов решений, основанных на особенностях того или иного математического аппарата теории (см. подробнее [63]). Наиболее эффективно идея разделения реализуется в теории потенциала ускорений.

Дело в том, что задачи гидродинамики в теории потенциала ускорений рассматриваются в двух пространствах: пространстве потенциала ускорений и пространстве потенциала скоростей. Переход к пространству потенциала скоростей является вынужденным, поскольку в пространстве потенциала ускорений решение получается с точностью до сингулярной составляющей. Последняя восстанавливается в пространстве потенциала скоростей, но все математические конструкции (в основной своей части — сингулярные интегральные уравнения) в этом пространстве оказываются существенно сложнее.

С целью полного использования преимущества пространства потенциала ускорений и был разработан метод разделения решений. В этом методе общее решение представляется в виде трех составляющих, причем две из них полностью определяют

ся в пространстве потенциала ускорений, а третья (сингулярная) — в пространстве потенциала скоростей. Но, как правило, сингулярные решения имеют известную структуру, поэтому задачи их определения существенно упрощаются.

Перейдем к детальному изучению метода разделения решений.

Решение задачи 1 (см. выше) дает интегральный оператор $A\gamma$, заданный в пространстве $L_1(S_p)$ со значениями в пространстве $C^2(\Omega)$ с известными свойствами [63]

$$\theta = A\gamma. \quad (9.16)$$

Существенно, что функция распределения $\gamma(\rho) \in L_1(S_p)$ и в решении допускаются сингулярные решения.

Для раздельного рассмотрения сингулярных и регулярных решений $\gamma(\rho)$ можно представить в виде

$$\gamma(\rho) = \gamma_1(\rho) + \gamma_2(\rho) + \gamma_3(\rho), \quad (9.17)$$

где $\gamma_1(\rho) \in C_0^1(S_p)$ — функция распределения регулярного вихревого решения, $\gamma_2(\rho) \in C_0^1(S_p)$ — функция распределения инерционной составляющей, $\gamma_3(\rho) \in L_1(S_p)$ — сингулярное решение.

Согласно граничному условию на поверхности S_p имеем интегральное уравнение

$$\bar{A}_n \tilde{\gamma} = F(g, t), \quad g \in S_p; \quad \tilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (9.18)$$

Расчленение (9.18) на два независимых уравнения осуществляется на основе соотношений связи (см. выше):

$$\bar{A}_n \gamma_1 = -\frac{\partial}{\partial x} F_1(g, t), \quad g \in S_p, \quad (9.19)$$

$$\bar{A}_n \gamma_2 = \frac{\partial}{\partial t} F_1(g, t), \quad g \in S_p.$$

Из теории потенциала ускорений известно [63], что ядра интегральных уравнений (9.19) имеют расходящиеся особенности, и эти уравнения имеют смысл только для случая принадлежности функций γ_1 и γ_2 пространству $C_0^1(S_p)$ (тогда оказывается возможной операция понижения порядка особенности ядра).

Выполнив операцию понижения порядка особенности, уравнения (9.19) запишем в виде:

$$N_{01} \bar{A}_n \gamma_1 = F_1(g, t) + c(\bar{g}, t), \quad g \in S_p; \quad (9.20)$$

$$N_{01} \bar{A}_n \hat{\gamma}_2 = -\frac{\partial}{\partial t} F_1(g, t), \quad g \in S_p;$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma_2, \quad N_{01} = -\int_0^x [1] d\tau; \quad \bar{g} \sim \{y, z\}.$$

Параметрическая константа $c(g, t)$ выбирается по условиям разрешимости первого уравнения (9.20) в классе $C_0^1(S_p)$ и играет важную роль в методе разделения решений.

При переходе от уравнений (9.19) к (9.20) уже проявляется специфика представления $\hat{\gamma}$ в виде двух компонент; процедуры понижения порядка особенности для первого и второго уравнений оказываются различными.

Действуя на первое уравнение оператором $\partial/\partial t$ и учитывая, что его ядро не зависит от времени, имеем

$$N_{01} \bar{A}_n \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \frac{\partial F(g, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} c(\bar{g}, t).$$

Из сравнения этого уравнения со вторым (9.20) устанавливается полезная для дальнейшего связь между функциями γ_1 и γ_2

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \gamma_2(\rho) = -\frac{\partial}{\partial t} \gamma_1(\rho) + \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma_{22}(\rho), \quad \rho \in S_p. \quad (9.21)$$

Уравнение для функции $\gamma_{22}(\rho)$ имеет вид

$$N_{01} \bar{A}_n \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma_{22} = \frac{\partial}{\partial t} c(\bar{g}, t), \quad g \in S_p. \quad (9.22)$$

Перейдем теперь к изучению сингулярного решения задачи. В силу уравнения (9.17) имеем

$$\varphi = - \int_B^x \theta(g, t - \tau + x) d\tau. \quad (9.23)$$

Структуру оператора $A\gamma$ можно задать в виде

$$A\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma(\rho, t) G(\rho, g) d\rho, \quad g \in \Omega.$$

Для этой структуры формула (9.23) приобретает вид

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \int_B^x \gamma(\rho, v) G(\rho, g) d\tau d\rho, \quad v = t - \tau + x. \quad (9.24)$$

Обсудим теперь вопрос о выборе значения нижнего предела в (9.23). Исходя из простых соображений о выполнимости условия отсутствия возмущений впереди на бесконечности ($\varphi \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$), обычно полагают $B = \infty$ [17].

В изучаемом классе задач такой выбор нижнего предела может привести к неверным результатам, и нужно использовать другие соображения.

Из задачи очевидно, что характеристики крыла в момент времени t зависят только от совокупности его состояний на интервале $[0 \div t)$, и, следовательно, аргумент v может принимать значения только внутри этого интервала.

При $\tau = t$ получаем максимальное значение $v = t$. Для того чтобы v могло принимать любые значения в интервале $[0 \div t)$, необходимо принять B , равное значению, при котором v обращается в нуль. На основе этого получаем $B = t + x$.

Введем постулат: функция $\gamma(\rho, v)$ есть непрерывная и дифференцируемая функция аргумента v . На основе этого постулата можно провести ряд преобразований с формулой (9.24).

Вводя вместо τ аргумент v , перепишем (9.24) в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \int_0^t \gamma(\rho, v) G(\rho, g) dp dv.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \gamma(\rho, v) G(\rho, g) dv &= \gamma(\rho, t) \int_0^t G(\rho, g) d\bar{v} - \\ &- \gamma(\rho, 0) \int_0^0 G(\bar{\rho}, g) d\bar{v} - \int_0^t \frac{\partial \gamma(\rho, v)}{\partial v} \int_0^v G(\rho, g) d\bar{v} dv. \end{aligned} \quad (9.25)$$

В соответствии с начальным условием задачи 1 $\gamma(0) = 0$. С другой стороны, для регулярной составляющей потенциала имеем

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \int_0^t \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \xi} \int_0^{\xi} G(\bar{\rho}, g) d\xi_1 dp dv. \quad (9.26)$$

В функцию $G(\bar{\rho}, g)$ переменные τ, ξ входят в виде разности $\tau - \xi$; при переходе к переменной v получаем $\tau - \xi = t + x - v - \xi$, откуда

$$\int_0^v G(\bar{\rho}, \bar{g}) d\bar{v} = \int_0^{\xi} G(\bar{\rho}, g) d\xi_1. \quad (9.27)$$

Преобразовав составляющую решения, связанную с функцией γ_1 по правилу (9.25), а с функцией γ_2 по правилу (9.26), и используя соотношение (9.21), находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma_1(\rho, t) \int_0^t G(\bar{\rho}, g) d\bar{v} dp - \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \int_0^t \frac{\partial \gamma_{22}(\rho, v)}{\partial \xi} \int_0^{\xi} G(\bar{\rho}, g) d\xi_1 dv dp, \\ \tilde{\varphi} &= \varphi_1 + \varphi_2. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Составим интегральное уравнение по граничному условию неперетекания (см. § 9.1—9.4) с использованием (9.28)

$$\tilde{\varphi}_n + \bar{\varphi}_{3n} = F_1(g, t), \quad g \in S_p. \quad (9.29)$$

Сравнивая значения нормальной производной $\bar{\varphi}_n$ с интегральным оператором первого уравнения и учитывая (9.27), замечаем, что первый член $\bar{\varphi}_n$, определяемый формулой (9.28), тождествен интегральному оператору первого уравнения (9.20). Это позволяет внести существенные упрощения и записать (9.29) так:

$$\bar{\varphi}_{3n} = -c(\bar{g}, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \int_0^t \frac{\partial \gamma_{22}(p, v)}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial}{\partial n} G(\bar{p}, g) d\xi_1 dv dp. \quad (9.30)$$

Как следует из (9.22), функция γ_{22} зависит только от параметрической константы $c(\bar{g}, t)$, и, следовательно, в интегральном уравнении (9.30) сингулярное решение зависит тоже только от $c(\bar{g}, t)$. Это существенно упрощает дело. Произвольный закон движения несущей поверхности, задаваемый $F(g, t)$, лишь косвенно влияет на сингулярное решение через параметрическую константу $c(\bar{g}, t)$.

Для определения параметрической константы нет необходимости в решении интегральных уравнений (9.20), а требуется только знание условий, при которых существует регулярное решение γ_1 .

Следует заметить, что четко эти условия сформулированы для плоской задачи о движении тонкого крыла в безграничной жидкости и крыла предельно малого удлинения.

Отсутствие четких рекомендаций по выбору параметрической константы для произвольно движущейся несущей поверхности является слабым местом развиваемого математического аппарата теории. Поэтому необходимы дополнительные исследования для решения этого вопроса. Указанные затруднения в определенной степени преодолеваются при внесении одномерных аппроксимаций в двухмерное интегральное уравнение несущей поверхности, так как в данном случае в рамках принятой точности можно предложить достаточно правдоподобные формулы для определения параметрической константы.

Для получения окончательных результатов следует использовать преимущество, связанное со знанием структуры сингулярного решения.

С целью дальнейших упрощений для γ_3 возьмем представление

$$\gamma_3(p, t) = \bar{\gamma}_3(\xi) a(\bar{g}, t), \quad (9.31)$$

где $\bar{\gamma}_3(\xi)$ — некоторая известная функция.

Представление (9.31) позволяет простым путем перейти от (9.30) к уравнению для функции $a(\bar{g}, t)$. Для этого необходимо преобразовать левую часть уравнения по правилу (9.25). После

преобразования получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma_3(p, t) \int_0^t \frac{\partial}{\partial n} G(\bar{p}, g) d\bar{v} dp - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \int_0^t \frac{\partial a(v, \bar{g})}{\partial v} \bar{\gamma}_3(\xi) \int_0^v \frac{\partial}{\partial n} G(\bar{p}, g) d\bar{v} dp dv = \\ & = -c(\bar{g}, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \int_0^t \frac{\partial \gamma_{22}(p, v)}{\partial \xi} \int_0^\xi \frac{\partial}{\partial n} G(\bar{p}, g) d\xi_1 dv dp. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Следует отметить, что уравнение (9.32), с одной стороны, должно быть справедливо для любых значений $x \in [-1; 1]$, а с другой — функция $a(\bar{g}, t)$ не зависит от x , поэтому правомочно рассмотрение (9.32) при некотором характерном значении x . Для выбора этого значения необходимо обратиться к принятому постулату о гладкости функции $\gamma(t)$. Рассмотрение частных задач (см. далее § 9.6, 9.7) показывает, что условие гладкости выполняется, если в качестве характерного значения x принимается $x=1$. Это, видимо, имеет место и в общем случае, в связи с чем в уравнении (9.32) следует принять $x=1$.

Таким образом, в общем формализме метода задача об аperiodических движениях несущей поверхности сведена к двум интегральным уравнениям для регулярных составляющих γ_1 и γ_2 в пространстве потенциала ускорений (или γ_1 и γ_{22}) и уравнению (9.32) для сингулярной составляющей решения.

Напомним, что основные затруднения в теории аperiodических решений связаны с построением в явном виде интегрального уравнения в пространстве потенциала скоростей

$$N\bar{A}_n \gamma = F_1(g, t), \quad g \in S_p$$

для произвольной функции γ . В развиваемом методе путем раздельного рассмотрения отдельных составляющих решения эту задачу удалось решить и в конечном итоге всю проблему свести к уравнению (9.32).

§ 9.6. Метод разделения решений в плоской задаче об аperiodическом движении тонкого крыла в безграничной жидкости

В этой задаче оператор $A\gamma$ имеет вид [63]

$$A\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{R} d\xi, \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (9.33)$$

Соответственно уравнения (9.20) запишем так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_1(s)}{x-s} ds = F_1 + c(t),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \gamma_2(s)/\partial s}{x-s} ds = -\frac{\partial}{\partial t} F_1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \gamma_{22}(s)/\partial s}{x-s} ds = \frac{\partial}{\partial t} c(t). \quad (9.34)$$

Известны также условие разрешимости в классе финитных функций

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F_1 + c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

и вид функции

$$\bar{\gamma}_3(s) = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}.$$

Для преобразования уравнения (9.32) нам потребуется решение последнего уравнения (9.34), которое мы возьмем из работы [63]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{22}(x, t) = -\frac{2\dot{c}(t)x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2D}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x\partial F/\partial t}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Рассмотрим функции $s_1(v)$, $s_2(v)$ и $s_3(v)$:

$$s_1(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} \frac{1}{v-s} ds,$$

$$s_2(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \frac{1}{v-s} ds, \quad (9.35)$$

$$s_3(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \frac{1}{v-s} ds.$$

В функциях $s_i(v)$ уравнение (9.32) запишем так:

$$a(t) s_1(x) - \int_0^t \frac{\partial a}{\partial t_1} s_1(t-t_1+x) dt_1 = -c(t) -$$

$$- 2 \int_0^t \frac{\partial \dot{c}}{\partial t_1} s_2(t-t_1+x) dt_1 + 2 \int_0^t D s_3(t-t_1+x) dt_1. \quad (9.36)$$

В соответствии с вычислениями А. И. Некрасова [55] функция $s_1(v)$ принимает значения:

$$s_1(v) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & |v| < 1; \\ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{v+1}{v-1}} - 1 \right), & v > 1. \end{cases} \quad (9.37)$$

Для функций $s_2(v)$ и $s_3(v)$ справедливы соотношения:

$$s_2(v) = \frac{1}{2} [s_1(v) - s_1(-v)], \quad s_3(v) = \frac{1}{2} [s_1(v) + s_1(-v)],$$

где

$$s_1(-v) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |v| < 1; \\ -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{v-1}{v+1}} - 1 \right), & v > 1. \end{cases}$$

Теперь обсудим более подробно вопрос о выборе характерных значений v в (9.36). Как следует из (9.37), функция $s_1(v)$ не обладает свойством непрерывности при $v \in [v_0; \infty)$, если $v_0 < 1$, тогда как ранее мы постулировали непрерывность функции $a(t)$ и ее первой производной. Для обеспечения нужной гладкости функции $a(t)$ необходимо, чтобы функция $s_1(v)$ была непрерывна в интегродифференциальном операторе уравнения почти всюду (за исключением точки $v=1$).

Поскольку $t-t_1 \in [0; t)$, условие гладкости выполняется, если принять $x=1$.

С учетом значений функций $s_i(v)$ и $x=1$ уравнение окончательно преобразуется к виду

$$\int_0^t \frac{\partial a}{\partial t_1} \sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} dt_1 = c(t) + \int_0^t \frac{\partial c}{\partial t_1} \left(\sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} + \sqrt{\frac{t-t_1}{2+t-t_1}} - 1 \right) dt_1 - \int_0^t D \left(\sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} - \sqrt{\frac{t-t_1}{2+t-t_1}} \right) dt_1. \quad (9.38)$$

Рассмотрим поведение решения при $t \rightarrow \infty$ для случая аperiodических движений, выходящих на стабилизированный режим. В этом случае, начиная с некоторых больших значений $t=t_2$,

$$\partial a / \partial t_1 = 0, \quad \partial c / \partial t_1 = 0, \quad D = 0, \quad t_1 > t_2.$$

Для времен, существенно превосходящих t_2 , имеем значения ядер

$$\sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} = \sqrt{\frac{t-t_1}{2+t-t_1}} = 1, \quad t \gg t_2.$$

В этих условиях уравнение (9.38) вырождается:

$$\int_0^{t_2} \frac{\partial a}{\partial t_1} dt_1 = c(t_2) + \int_0^{t_2} \frac{\partial c}{\partial t_1} dt_1, \quad t \gg t_2, \quad a(t_2) - a(0) = 2c(t_2).$$

Если принять, что $a(0) = 0$, получаем значение $a = 2c$, совпадающее со значением постоянной сингулярного решения в стационарной теории [63].

§ 9.7. Задача Вагнера

Для сравнения решений, вытекающих из уравнения (9.38), с известными решениями в настоящем параграфе исследуется задача о порыве (задача Вагнера). Эта задача наиболее полно рассмотрена в [17], и результаты ее решения широко используются при изучении произвольных аperiодических движений.

В задаче Вагнера происходит резкое изменение угла атаки на некоторую величину $\Delta\alpha$, и для описания этой ситуации следует принять

$$\frac{\partial c}{\partial t_1} = c(0) \delta(t), \quad D = 0.$$

Для этого закона изменения функции c имеем уравнение

$$\int_0^t \frac{da}{dt_1} \sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} dt_1 = c(0) \left(\sqrt{\frac{2+t}{t}} + \sqrt{\frac{t}{2+t}} \right). \quad (9.39)$$

В общем случае при резком изменении угла атаки можно ожидать и резкого изменения подъемной силы, поэтому при переходе от (9.25) к (9.26) в задаче о порыве не следует полагать $\gamma(0) = 0$, а нужно выполнять все вычисления заново. В результате вместо уравнения (9.39), справедливого при условии $a(0) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} a(t) + a(0) \left(\sqrt{\frac{2+t}{t}} - 1 \right) + \int_0^t \frac{\partial a}{\partial t_1} \left(\sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} - 1 \right) dt_1 = \\ = c(0) \left(\sqrt{\frac{2+t}{t}} + \sqrt{\frac{t}{2+t}} \right). \end{aligned} \quad (9.40)$$

Из теории интегральных уравнений Вольтерра известно, что для получения гладких решений необходимо, чтобы правая

часть уравнения была непрерывно дифференцируема на $I \in [0; \infty)$. Это условие будет выполнено, если $a(0) = c(0)$. Принимая это значение $a(0)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра

$$\int_0^t \frac{\partial a}{\partial t_1} \sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} dt_1 = c(0) \sqrt{\frac{t}{2+t}}. \quad (9.41)$$

Интересно отметить, что уравнение (9.41) можно вывести и из (9.39). Для этого надо принять решение в виде

$$\frac{\partial a}{\partial t} = k\delta(0) + \frac{\partial a_1}{\partial t},$$

где $k = c(0)$.

Таким образом, в задаче Вагнера получается одно и то же интегральное уравнение типа Вольтерра с учетом или без учета начального условия $\gamma(0) = 0$.

§ 9.8. Преобразование интегрального уравнения плоской задачи. Формулы для усилий, действующих на крыло в нестационарном потоке

Будем искать решение интегрального уравнения плоской задачи (см. § 9.6) в виде

$$a(t) = \int_0^t \dot{c}k_1(t-t_1) dt_1 + \int_0^t Dk_2(t-t_1) dt_1. \quad (9.42)$$

Для принятой формы решения интегральное уравнение плоской задачи преобразуется в два независимых уравнения для ядер $k_1(s)$ и $k_2(s)$:

$$\int_0^s \frac{\partial k_1}{\partial s_1} \sqrt{\frac{2+s-s_1}{s-s_1}} ds_1 = \sqrt{\frac{2+s}{s}} [1 - k_1(0)] + \sqrt{\frac{s}{2+s}},$$

$$\int_0^s \frac{\partial k_2}{\partial s_1} \sqrt{\frac{2+s-s_1}{s-s_1}} ds_1 = \sqrt{\frac{2+s}{s}} [1 + k_2(0)] + \sqrt{\frac{s}{2+s}}.$$

По условию отсутствия сингулярных решений (в данном случае δ -решений) следует положить $k_1(0) = 1$, $k_2(0) = -1$. В этом случае два вышеприведенных уравнения можно объединить в одно

$$\int_0^s \frac{\partial \bar{k}}{\partial s_1} \sqrt{\frac{2+s-s_1}{s-s_1}} ds_1 = \sqrt{\frac{s}{2+s}}, \quad (9.43)$$

причем

$$k_1(s) = 1 + \bar{k}(s), \quad k_2(s) = -1 + \bar{k}(s), \quad \bar{k}(0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что интегральное уравнение (9.43) совпадает с интегральным уравнением (9.41) задачи Вагнера. С учетом (9.43) решение (9.42) можно записать в виде

$$a(t) \equiv c(t) - \int_0^t D(t_1) dt_1 + \int_0^t (\dot{c} + D) \bar{k}(t - t_1) dt_1.$$

Перейдем к выводу формул для коэффициента подъемной силы, действующей на крыло.

Общий коэффициент подъемной силы определяется из формулы [63]

$$C_y = \int_{-1}^{+1} \gamma(s) ds.$$

Соответственно вихревую составляющую можно представить так:

$$C_{yв} = \int_{-1}^{+1} [\gamma_1(s) + \gamma_3(s)] ds.$$

Если обозначить:

$$C_{yв}^1 = \int_{-1}^{+1} \gamma_1(s) ds, \quad C_{yв}^2 = \int_{-1}^{+1} \gamma_3(s) ds,$$

то по результатам § 9.1—9.4 и [63] имеем

$$C_{yв}^1 = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{F_1(x) x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (9.44)$$

тогда как

$$C_{yв}^2 = \pi a(t). \quad (9.45)$$

Если обозначить $\bar{D} = \int_0^t D(t_1) dt_1$ и $c + \bar{D} = \bar{a}(t)$ и учесть значения c и D , то получим:

$$a(t) = \bar{a}(t) + \int_0^t \dot{\bar{a}}(t_1) \bar{k}(t - t_1) dt_1,$$

$$\dot{\bar{a}}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} F_1(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx, \quad (9.46)$$

$$\bar{a}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} F_1(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

Из (9.44) — (9.46) следует

$$C_{y_{\text{в}}} = \left[\bar{\alpha}(t) + \int_0^t \dot{\bar{\alpha}}(t_1) \bar{k}(t-t_1) dt_1 \right] \pi. \quad (9.47)$$

Результаты настоящего параграфа свидетельствуют о преимуществах развитого метода по сравнению с известными теориями крыла в нестационарном потоке, в частности интегральное уравнение (9.43) по форме совпадает с известными интегральными уравнениями Вольтерра (оно отличается только правой частью для интегрального уравнения теории Седова), в то время как формула для коэффициента подъемной силы (9.47) проще формул Глауэрта — Седова [90].

Формула типа (9.47) содержится в работах по нестационарной аэродинамике, в которых используется принцип наложения с помощью интеграла Дюамеля [17, 101]. Некоторое обобщение в (9.47) связано с введением величины $\bar{\alpha}(t)$, определяемой для произвольной формы тонкого крыла.

§ 9.9. Плоская несущая поверхность

Для плоской несущей поверхности в соответствии с [63] уравнение (9.20) запишем в виде

$$N_{01} \bar{A}_z \gamma_1 = F_1(g, t) + c(t), \quad g \in S_p;$$

$$N_{01} \bar{A}_z \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{\gamma}_1(\rho) \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \lambda^2(y-\eta)^2}}{x-\xi} d\rho. \quad (9.48)$$

Рассмотрение этой задачи начнем с анализа функции $c(t)$. Для крыла предельно малого удлинения она определяется так [63]:

$$c(t) = -\frac{F_1(+1, t) + F_1(-1, t)}{2}. \quad (9.49)$$

Для движений вида $F_1(g, t) = -\alpha(t)$ имеем

$$c(t) = \alpha(t), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (9.50)$$

Так как $c(t)$ одинакова для двух предельных случаев, в дальнейшем допустим, что для аperiodических движений вида $F_1(g, t) = -\alpha(t)$ функция $c(t)$ не зависит от относительного удлинения и определяется по (9.50). В соответствии с этим будем рассматривать только такой случай движения крыла.

§ 9.10. Крыло малого удлинения

Для крыла малого удлинения оператор $N_{01}\bar{A}_z\bar{\gamma}_1$ упрощается [63]:

$$N_{01}\bar{A}_z\bar{\gamma}_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_j(v, \eta)}{y - \eta} d\eta,$$

$$\Phi_j(v, \eta) = \int_{-1}^{+1} \bar{\gamma}_j(\rho) \operatorname{sign}(v - \xi) d\xi.$$

Известно, что сингулярное решение для крыла малого удлинения имеет вид [63]

$$\gamma_3 = \bar{k}(\eta, t) \delta(-1 + \xi).$$

С учетом этого имеем

$$\Phi_3(v, \eta, t) = \bar{k}(\eta, t) \operatorname{sign}(v - 1).$$

Функцию $s_1(v)$ в (9.36) запишем так:

$$s_1(v) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} \frac{k(\eta, v)}{y - \eta} d\eta, & v \leq 1; \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} \frac{k(\eta, v)}{y - \eta} d\eta, & v > 1. \end{cases} \quad (9.51)$$

Поскольку для функции γ'_{22} справедливо уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma'_{22}}{y - \eta} \operatorname{sign}(x - \xi) d\xi d\eta = c'(t),$$

решение γ'_{22} примем в виде

$$\gamma'_{22} = k_2 [\delta(1 + \xi) - \delta(\xi - 1)],$$

но тогда

$$\Phi_{22}(v, \eta) = k_2 [\operatorname{sign}(v - 1) - \operatorname{sign}(v + 1)] = \begin{cases} -2k_2, & |v| < 1; \\ 0, & |v| > 1. \end{cases} \quad (9.52)$$

Отсюда видно, что функция $s_1(v) = 0$, $v > 1$ и уравнение крыла малого удлинения будет иметь известную форму [63]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma(\eta, t)}{y - \eta} d\eta = \alpha(t). \quad (9.53)$$

Из (9.53) следует вывод, что при произвольных нестационарных движениях вихревая составляющая решения определяется по квазистационарной теории и на крыле малого удлинения отсутствует эффект запаздывания. Этот результат согласуется с соответствующим результатом из теории колеблющегося крыла малого удлинения.

§ 9.11. Крыло произвольного удлинения

В теории крыла произвольного удлинения в нестационарном аperiodическом потоке существуют затруднения, связанные главным образом с тем, что параметрическая константа в сингулярном решении должна определяться из двухмерного сингулярного интегрального уравнения, причем в настоящее время трудно надеяться на получение его замкнутого решения. Поэтому, следуя традиционным путем, широко принятым в теории крыла в нестационарном потоке, можно попытаться разработать одномерные аппроксимации, дающие достаточно удовлетворительные приближения решения. Вопрос об одномерных аппроксимациях ядер двухмерных интегральных уравнений достаточно хорошо разработан в стационарной теории. Известные в литературе аппроксимации всесторонне апробированы, и на их основе можно получить надежный результат. Однако положение существенно усложняется в задачах нестационарной аэродинамики.

Обычно при введении тех или иных аппроксимаций логика рассуждений с позиции теории предельной корректности сводится к следующему. В распоряжении исследователя имеется общая модель системы, дополнительно — две предельные модели:

а) математическая модель крыла в плоскопараллельном потоке (некорректная предельная модель [63]);

б) математическая модель крыла малого удлинения.

Для получения удовлетворительной информации в области больших значений λ используется или физическая гипотеза плоских сечений Прандтля, или некорректная одномерная аппроксимация ядра двухмерного интегрального уравнения [63].

В обоих случаях задача сводится к одномерным интегродифференциальным уравнениям Прандтля.

Для получения одномерных аппроксимаций, пригодных для произвольных удлинений крыла, используются вторая предельная модель и дополнительные сведения о структуре двухмерного ядра и монотонности поведения решения в зависимости от λ . В результате этого анализа общая модель системы заменяется приближенной моделью, совпадающей с точными решениями в двух предельных случаях. Как правило, удачно выбранная аппроксимация обеспечивает удовлетворительную для практики точность решения. Приближенная математическая модель имеет существенные преимущества с точки зрения информационной обобщимости и дальнейшего математического анализа, в связи

с чем в настоящее время активно проводятся исследования по одномерным аппроксимациям.

В задачах нестационарной аэродинамики крыла изучается поведение системы на всем или достаточно большом временном интервале. Поэтому выбор качественных одномерных аппроксимаций оказывается более трудным. По существу при их выборе мы должны решить вопрос о согласовании четырех математических моделей:

1) математическая модель крыла в плоском потоке (интегральное уравнение (9.43));

2) математическая модель теории крыла малого удлинения (интегральное уравнение (9.53));

3) модель крыла произвольного удлинения при $t \rightarrow \infty$ (стационарная теория);

4) математическая модель, описывающая скачок ядра интегрального оператора в формулах типа (9.44) при $t=0$.

Напомним, что для плоского потока этот скачок равен 1 (\bar{k} также стремится к 1 при $s \rightarrow \infty$), а для крыла малого удлинения он равен 2.

Пока не будем касаться вопроса анализа математической модели скачка, и выбор одномерных аппроксимаций осуществим из условия согласования трех математических моделей.

Для крыла произвольного удлинения уравнение типа (9.36) запишем в виде

$$\begin{aligned} a(t) s_{1\lambda}(1) - \int_0^t \frac{\partial a}{\partial t_1} s_{1\lambda}(t - t_1 + 1) dt_1 = \\ = -c(t) - 2 \int_0^t \frac{\partial c}{\partial t_1} s_{2\lambda}(t - t_1 + 1) dt_1. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Введем для функций $s_{1\lambda}$ и $s_{2\lambda}$ следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} s_{1\lambda}(1) &= -\frac{1}{2} F_1[\lambda(y)] - \frac{F_2(\lambda)}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Gamma / \partial \eta}{y - \eta} d\eta, \\ s_{1\lambda}(t+1) &= \frac{1}{2} F_1[\lambda(y)] \left(-1 + \sqrt{\frac{t+2}{t}} \right) + \frac{F_2(\lambda)}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Gamma / \partial \eta}{y - \eta} d\eta, \\ s_{2\lambda}(t+1) &= \frac{F_3(\lambda)}{4} \left(\sqrt{\frac{2+t}{t}} + \sqrt{\frac{tB}{2+tB}} - 2 \right). \end{aligned} \quad (9.55)$$

По условию согласования двух предельных моделей при $\lambda=0$ и $\lambda \rightarrow \infty$

$$F_2(\lambda) \in [1/2 \div 1), \quad F_3(\lambda) \in [1 \div 0), \quad \lambda \in [\infty \div 0).$$

Принимая аппроксимации (9.55) и производя необходимые вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \frac{F_1(\lambda(y))}{2} \int_0^t \frac{\partial \Gamma}{\partial t_1} \sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} dt_1 + \frac{F_2(\lambda)}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Gamma / \partial \eta}{y-\eta} d\eta = \alpha(t) - \\ - \frac{F_3(\lambda)}{2} \int_0^t \dot{\alpha}(t_1) \left[\sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} + \sqrt{\frac{(t-t_1)B}{2+(t-t_1)B}} - 2 \right] dt_1. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Функцию $F_1[\lambda(y)]$ определим по условию перехода (9.56) в известное уравнение Прандтля для стационарной теории. Внося допущения стационарности, имеем

$$\Gamma(\eta) = \frac{2}{F_1[\lambda(y)]} \left(\alpha - \frac{F_2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Gamma / \partial \eta}{y-\eta} d\eta \right).$$

Если принять $F_1(\lambda(y)) = [4\lambda(y)/a_\infty]$, это уравнение приобретет стандартную форму уравнения Прандтля. С учетом этого значения $F_1(\lambda)$ (9.56) запишем так:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial \Gamma}{\partial t_1} \sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} dt_1 = \frac{a_\infty}{2\lambda(y)} \left\{ \alpha(y) - \frac{F_2(\lambda)}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Gamma / \partial \eta}{y-\eta} d\eta + \right. \\ \left. + \frac{F_3(\lambda)}{2} \int_0^t \dot{\alpha}(t_1) \left[\sqrt{\frac{2+t-t_1}{t-t_1}} + \sqrt{\frac{(t-t_1)B}{2+(t-t_1)B}} - 2 \right] dt_1 \right\}. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\Gamma(y, t) = \int_0^t \dot{\alpha}(t_2) k(t-t_2, y) dt_2.$$

Производя необходимые вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^s \sqrt{\frac{2+s-s_1}{s-s_1}} \frac{\partial k(s_1, y)}{\partial s_1} ds_1 = \sqrt{\frac{2+s}{s}} \left[\frac{a_\infty}{2\lambda(y)} \frac{F_3(\lambda)}{2} - k(0, y) \right] + \\ + \frac{a_\infty}{2\lambda(y)} \left[1 - \frac{F_2(\lambda)}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial k(s, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{y-\eta} + \frac{F_3(\lambda)}{2} \left(\sqrt{\frac{sB}{2+sB}} - 2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.58)$$

По условию отсутствия сингулярных решений найдем

$$\frac{a_\infty}{4\lambda(y)} F_3(\lambda) - k(0, y) = 0,$$

или

$$k(0, y) = \frac{a_\infty F_3(\lambda)}{4\lambda(y)}. \quad (9.59)$$

Как следует из (9.59), выбор начального значения ядра $k(s, y)$ зависит от выбора функции $F_3(\lambda)$. Из модели теории крыла малого удлинения имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial k(0, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{y - \eta} = 1 \Big|_{\lambda \rightarrow 0},$$

откуда

$$k(0, y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (9.60)$$

Из (9.58) и (9.59) следует, что одномерные аппроксимации типа (9.55) будут пригодны только для крыла с эллиптической формой в плане (в этом случае $\frac{1}{\lambda(y)} = \frac{1}{\lambda(0)} \sqrt{1 - y^2}$). Учитывая (9.58), (9.59), получаем асимптотическое представление $F_3(\lambda)$ при малых λ :

$$F_3(\lambda) = \frac{4\lambda(0)}{a_\infty} + O(\lambda^\beta), \quad \beta > 1. \quad (9.61)$$

Как было отмечено выше, по условию согласования с моделью плоской задачи при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$F_3(\lambda) = 1 + O(1/\lambda^\gamma), \quad \gamma > 0. \quad (9.62)$$

Функцию $F_2(\lambda)$ можно принять в соответствии с рекомендациями работы [84]

$$F_2(\lambda) = (1 + e^{-0,26\lambda})/2. \quad (9.63)$$

Итак, в уравнении (9.58) не найдены только $F_3(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Вопрос их определения мы пока оставим в стороне и вернемся к нему после получения асимптотического решения уравнения (9.58).

Будем искать решение уравнения (9.58) в виде

$$k(s, y) = \Phi(s) \sqrt{1 - y^2}.$$

Для функции $\Phi(s)$ справедливо уравнение

$$\int_0^s \sqrt{\frac{2+s-s_1}{s-s_1}} \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} ds_1 = \frac{a_\infty}{2\lambda(0)} \left[1 - F_2(\lambda) \Phi(s) + \frac{F_3(\lambda)}{2} \left(\sqrt{\frac{Bs}{2+sB}} - 2 \right) \right]. \quad (9.64)$$

Теперь наша задача состоит в разработке асимптотического метода для решения уравнений (9.43) и (9.64), чему и будет посвящен следующий параграф.

§ 9.12. Асимптотический метод решения интегральных уравнений крыла в нестационарном потоке

Как было отмечено выше, целесообразность использования метода разделения решений опиралась на один из основных результатов теории предельной корректности, а именно: при переходе к модели второго уровня корректности происходит перемена корректного предела. Покажем, что в рассматриваемом классе задач именно так обстоит дело.

Прежде всего отметим, что при малых значениях аргумента $(s-s_1) < 1$ уравнение (9.43), описывающее в этом случае асимптотику в окрестности малых времен, переходит в известное уравнение Абеля относительно функции $\tilde{k} = \partial k / \partial s$:

$$\int_0^s \frac{\tilde{k}(s_1)}{\sqrt{s-s_1}} ds_1 = f(s_1). \quad (9.65)$$

Решение этого уравнения имеет вид [49]

$$\tilde{k}(s) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{f(s_1)}{\sqrt{s-s_1}} ds_1.$$

Для двух частных случаев задания функции $f(s)$:

$$f(s) = 1/\sqrt{2}, \quad f(s) = \sqrt{s/2},$$

решение запишем в форме:

$$\tilde{k}'(s) = \frac{c}{\sqrt{s}}, \quad \tilde{k}^2(s) = \frac{1}{2}.$$

Из рассмотрения этих двух случаев следует, что при малых s решение уравнения (9.43) имеет вид

$$\tilde{k}(s) = 1 + \frac{1}{2}s + O(s^\beta), \quad \beta > 1$$

и что в асимптотическом решении уравнения (9.64) могут содержаться члены вида $s^{n/2}$.

Структура функционального параметра τ для уравнений (9.43) и (9.64) определяется видом правых частей, а именно:

$$\tau = s/(2+s) \quad \text{для (9.43),}$$

$$\tau = Bs/(2+Bs) \quad \text{для (9.64).}$$

Следуя формализму метода функциональных параметров (для регулярного класса корректности), асимптотическое решение уравнений (9.43) и (9.64) будем искать в виде:

$$\tilde{k}(s) = k_0 + \tau k_1 + \tau^2 k_2 + \dots + O(\tau^N), \quad (9.66)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \Phi_{-1/2} \tau^{-1/2} + \Phi_0 + \tau^{1/2} \Phi_{1/2} + \tau \Phi_1 + \dots + O(\tau^N). \quad (9.67)$$

Дальнейший формализм построения асимптотических решений вида (9.66) и (9.67) описан в главе 5. Конкретные вычисления приводят к следующему асимптотическому решению уравнения (9.43):

$$k(s) = 1 + \frac{1}{2}\tau + 0,25\tau^2 + \frac{7}{48}\tau^3 + O(\tau^4). \quad (9.68)$$

Расчет по формуле (9.68) хорошо согласуется с результатами решения задачи Вагнера, приведенными в монографии А. И. Некрасова [55]. При $s \rightarrow \infty$ точное значение k равно 2, тогда как по формуле (9.68) это значение равно 1,896, т. е. максимальная ошибка составляет 5%. Эту ошибку можно уменьшить, принимая в (9.68)

$$O(\tau^4) = \frac{5}{48}\tau^4.$$

Для функций Φ_k получены такие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_{-1/2} &= \frac{a_\infty}{2\pi\lambda(0)\sqrt{B}} (1 - \Phi(0)F_2 - F_3), \\ \Phi_0 &= \frac{a_\infty}{4\lambda(0)\sqrt{B}} \left(-2\Phi_{-1/2}F_2 + \frac{1}{2}F_3 \right), \\ \Phi_{1/2} &= -\frac{a_\infty}{\pi\lambda(0)\sqrt{B}} \Phi_0 - \frac{1-3B}{2B} \Phi_{-1/2}, \\ \Phi_1 &= -\frac{a_\infty F_2}{4\lambda(0)\sqrt{B}} \Phi_{1/2} - \frac{1-5B}{4B} \Phi_0, \\ \Phi_{3/2} &= -\frac{4a_\infty F_2}{3\pi\lambda(0)\sqrt{B}} \Phi_1 - \frac{1-7B}{6B} \Phi_{1/2}, \\ \Phi_2 &= \frac{15a_\infty}{16\lambda(0)\sqrt{B}} \Phi_{3/2} - \frac{1-9B}{16B} \Phi_1 - \Phi_0 \times \\ &\times \left[\frac{5}{8} - \frac{1}{8B^2} \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{4}B + \frac{43}{8}B^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.69)$$

§ 9.13. Окончательное согласование приближенной модели крыла большого размаха.

Формулы для коэффициента подъемной силы

В § 9.11 мы отложили вопрос окончательного выбора функций $F_s(\lambda)$ и $B(\lambda)$ с тем, чтобы на основе анализа асимптотического решения получить для этого дополнительный материал. При $\lambda \rightarrow \infty$ из (9.69) имеем:

$$\Phi_{-1/2} = \Phi_{1/2} = \Phi_{3/2} = 0, \quad \Phi_0 = a_\infty/8\lambda(0), \quad \Phi_1 = \Phi_0, \quad \Phi_2 = \frac{7}{16}\Phi_1.$$

Эти значения отличаются только множителем $a_\infty/4\lambda(0)$ от значений, даваемых формулой (9.68). Для согласования решения (9.68) с результатами крыла малого удлинения необходимо обеспечить асимптотику коэффициентов Φ_i при $\lambda \rightarrow 0$ типа

$$\Phi_i \lambda = O(\lambda^\gamma), \quad \gamma > 0.$$

Этого можно достичь за счет выбора функции $B(\lambda)$. Именно для этой цели она и была введена. Задачу обеспечения необходимой асимптотики можно решить, если принять, например, функцию $B(\lambda)$ в виде

$$B(\lambda) = e^{1/\lambda}. \quad (9.70)$$

Заметим, что асимптотические решения (9.68) и (9.69) имеют различную структуру. Функция $k(s)$ в (9.68) есть аналитическая функция параметра τ , тогда как функция $\Phi(s)$ всего лишь непрерывна.

На данной стадии исследования неясно, с чем связано ухудшение гладкости функции $\Phi(s)$: с физическим существом явлений на крыле конечного размаха или с грубостью принятых одномерных аппроксимаций (9.55).

Отметим также, что при произвольных начальных данных $\Phi(0)$ функция $\Phi(s)$ в окрестностях малых s имеет асимптотику

$$\Phi(s) = \Phi(0) + O(\sqrt{s}),$$

тогда как в плоской задаче

$$k(s) = 1 + O(s).$$

Поэтому выбор функции $F_3(\lambda)$ подчиним условию обеспечения одинакового поведения асимптотического решения при малых s для разных удлинений крыла, для этого следует положить

$$1 - \Phi(0)F_2 - F_3 = 0.$$

Поскольку по (9.59)

$$\Phi(0) = \frac{a_\infty}{4\lambda(0)} F_3,$$

то

$$F_3 = \left(\frac{a_\infty}{4\lambda(0)} F_2 + 1 \right)^{-1}.$$

Некоторую оценку правильности выбора функции F_3 можно получить на основе сопоставления с результатами решения в [101]. Джонс для коэффициента подъемной силы крыла конечного размаха в аperiodическом потоке предлагает зависимость

$$C_y = a_\lambda \Psi(s) \alpha(s) \quad (9.71)$$

и приводит некоторые данные по функции $\Psi(s)$ при разных λ . Для сопоставления с его результатами получим формулы для

коэффициента подъемной силы, который связан с функцией $\Phi(s)$ зависимостями типа (9.47)

$$C_{yв}(t) = c\lambda \left[\Phi(0) \alpha(t) + \int_0^t \dot{\alpha}(t_1) \Phi(t-t_1) dt_1 \right]. \quad (9.72)$$

Установим значение постоянной c из сопоставления значения C_y при $s=0$ для предельных случаев

$$C_y(0) = \frac{ca_\infty F_3}{4} \alpha(0). \quad (9.73)$$

В плоской задаче

$$C_y(0) = \frac{a_\infty}{2} \alpha(0).$$

Для крыла малого удлинения

$$C_y(0) = \frac{\pi\lambda}{2} \alpha(0), \quad \lambda = \frac{4}{\pi} \lambda(0).$$

Коэффициент $c=2$ обеспечивает правильное значение C_y при $\lambda=0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ при $t=0$.

В задаче Вагнера для крыла конечного размаха при $t \rightarrow \infty$ коэффициент подъемной силы будет определяться известной формулой [63]

$$C_y = a_\infty / \left(1 + \frac{2a_\infty}{\pi\lambda} F_2 \right) \alpha(0).$$

Для сопоставления с результатами Джонса составим функцию

$$\bar{\Psi} = \frac{C_y(0)}{C_y} = \left(1 + \frac{2a_\infty}{\pi\lambda} F_2 \right) / \left[2 \left(1 + \frac{a_\infty}{\pi\lambda} F_2 \right) \right]. \quad (9.74)$$

Эта функция представляет относительный скачок подъемной силы при $t=0$. Ниже приведены значения $\Psi(0)$ по данным Джонса и $\bar{\Psi}$ по (9.74):

$$\Psi = 0,717, \quad \bar{\Psi} = 0,687 \quad \text{для } \lambda = 3;$$

$$\Psi = 0,639, \quad \bar{\Psi} = 0,615 \quad \text{для } \lambda = 6.$$

Видно, что полученное решение неплохо согласуется с результатами Джонса.

Замечания: 1. Как следует из § 9.11—9.13, введение одномерных аппроксимаций в теорию крыла в аperiodическом потоке оказывается существенно сложнее, чем соответствующая задача для крыла в стационарном потоке. Если в аппроксимациях типа Лейдло участвует только одна функция $F_1[\lambda(y)]$ (иногда две, см. [63]) и этого достаточно для получения хорошего прибли-

жения для любых относительных удлинений, то для аппроксимации типа (9.54) необходимо вводить три функции, окончательный выбор которых требует достаточно подробного анализа по согласованию предельных математических моделей.

2. В результате согласования математических моделей построенная приближенная математическая модель, заданная уравнениями (9.59), (9.64), дает правильное предельное значение $t \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ (при наличии стабилизированного режима) и неплохо согласуется с результатами Джонса при $t=0$.

3. Сложность физического явления, сопровождающего нестационарное движение, и связанная с нею сложность математической модели привели к тому, что разработанные простейшие аппроксимации оказались пригодными только для крыла с эллиптической формой в плане.

4. Наименее изученным оказался вопрос описания движения несущей поверхности в окрестности малых значений λ . В рамках принятых аппроксимаций не удастся строго изучить этот вопрос и необходимы дополнительные исследования.

5. В целом принятые одномерные аппроксимации, по-видимому, наиболее простые из возможных в данной теории, и совокупно без дополнительных исследований они еще не могут претендовать на достаточную достоверность в области средних значений λ .

Основная цель введения аппроксимации состояла в изучении общих свойств течений, сопровождающих нестационарное движение крыла, и анализе основных особенностей теории одномерных аппроксимаций в рассматриваемом классе задач. Надо считать, что вопрос об одномерных аппроксимациях требует дальнейших глубоких исследований.

АНАЛИЗ
НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Глава 10

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

§ 10.1 Общие сведения

Как следует из приведенного во введении примера 1, при исследовании методом Пуанкаре задачи о нелинейных колебаниях в системе, описываемой неавтономными обыкновенными дифференциальными уравнениями, в решениях появляются вековые члены вида $t^{\alpha} \sin \omega t$, $t^{\beta} \cos \omega t$. Отсюда следует, что решение будет пригодным только на интервале $I_0 \subset [0 \div T_1)$ (T_1 принимает некоторые недостаточно большие значения), т. е. корректно в ограниченной области. Это существенный недостаток такого типа асимптотических решений, и для его устранения были развиты новые более эффективные методы. Особое место среди них занимает метод усреднения как по эффективности, так и по развитию его прикладной и теоретической частей.

Заметим, что в настоящее время термином «метод усреднения» объединяют большую группу отдельных реализаций метода, связанных общей идеей усреднения правых частей дифференциальных уравнений. Различные реализации идеи усреднения возникают в зависимости от типа математических моделей системы.

В целом метод усреднения получил всеобщее признание и стал одним из основных при изучении разнообразных проблем нелинейной механики.

Наибольшее развитие получили также варианты метода усреднения, основанные на идеях Н. Н. Боголюбова. Существенный вклад в их изучение и обобщение внес Ю. А. Митропольский.

В настоящей монографии мы не ставили цели подробного изложения основных результатов метода усреднения (кстати, постановка такой задачи вряд ли правомерна, поскольку в научной литературе есть крупные монографии, посвященные этому вопросу [47, 48]), а ограничились только рассмотрением его основных идей с позиций теории предельной корректности.

§ 10.2. Метод Ван-дер-Поля

Прежде чем перейти к изучению метода усреднения в основном варианте, базирующемся на идеях Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, рассмотрим одну из первых реализаций идеи усреднения, данную Ван-дер-Подем.

Метод Ван-дер-Поля не имеет достаточного обоснования и применим к узкому классу задач, однако он интересен с позиции теории предельной корректности. Это определяется тем, что метод допускает наглядный анализ, в связи с чем удается четко показать ряд особенностей метода усреднения с точки зрения теории предельной корректности.

Рассмотрим метод Ван-дер-Поля, следуя при его изложении монографии Ю. А. Митропольского [47].

Пусть нелинейные колебания в системе описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (10.1)$$

Если в уравнении (10.1) $\varepsilon \equiv 0$, то его решение описывает гармонические колебания

$$x = a \cos(\omega t + \varphi). \quad (10.2)$$

В методе Ван-дер-Поля полагают, что приближенное решение уравнения (10.1) при малых значениях параметра ε можно также записать в виде (10.2), допустив, что набор $\{a, \varphi\}$ есть «медленно меняющиеся» коэффициенты (функции времени). При этом полагают, что $\{a, \varphi\}$ удовлетворяет системе «укороченных уравнений» с разделяющимися переменными:

$$\dot{a} = \varepsilon A(a), \quad \dot{\varphi} = \varepsilon B(a). \quad (10.3)$$

Для фактического построения системы «укороченных уравнений» следует записать уравнение (10.1) в виде

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x + \varepsilon f(x, y) \quad (10.4)$$

и подставить (10.2) в (10.4). В результате получаем:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f[a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)] \sin(\omega t + \varphi), \quad (10.5)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\omega a} f[a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)] \cos(\omega t + \varphi).$$

Из (10.5) видно, что $\{a, \varphi\}$ действительно медленно меняющаяся конструкция, поскольку правые части уравнений пропорциональны параметру ε .

Построив для правых частей уравнений (10.5) разложения в ряд Фурье, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon \sum_n [f_n^{(1)}(a) \cos n(\omega t + \varphi) + \bar{f}_n^{(1)}(a) \sin n(\omega t + \varphi)], \\ \dot{\varphi} &= -\varepsilon \sum_n [f_n^{(2)}(a) \cos n(\omega t + \varphi) + \bar{f}_n^{(2)}(a) \sin n(\omega t + \varphi)]. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Если удержать в (10.6) только первые члены разложения в ряд Фурье (что эквивалентно усреднению по $\psi = \omega t + \varphi$), то будем иметь систему (10.3). При этом следует положить

$$A(a) = -f_0^{(1)}(a), \quad B(a) = -f_0^{(2)}(a),$$

или

$$A(a) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$B(a) = -\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Приведенный выше материал достаточен для предварительного анализа предельной корректности.

Отметим, что в методе Ван-дер-Поля четко просматриваются две основные идеи:

1) выполняется переход от исходной математической модели (10.1) к модели (10.5);

2) в математической модели (10.5) осуществляется осреднение правых частей, что позволяет перейти к модели (10.3).

Таким образом, от системы с вектором пространства состояний, определяемым набором $\{x, y\}$, в методе переходят к новой системе, определяемой набором $\{a, \varphi\}$; отсюда видно, что метод Ван-дер-Поля есть метод второго уровня корректности. Это одна из характерных особенностей метода Ван-дер-Поля, сохраняющаяся и для метода усреднения в целом.

Вторая характерная особенность метода Ван-дер-Поля состоит в процедуре осреднения. Без процедуры осреднения правых частей (10.5) переход к модели второго уровня задачу не упрощает, и основные преимущества связаны с системой (10.3).

Рассматривая правые части уравнений (10.5) как некоторые функции времени $f^1(t)$ и $f^2(t)$, следует ввести и метрические пространства $E(I)$, которым они принадлежат.

Заметим, что метод Фурье дает представление функции $f(t) \in L_2(I)$ рядом Фурье. С учетом этого замечания и того, что в методе Ван-дер-Поля существует звено перехода от уравнения

(10.5) к (10.6), приходим к выводу, что в методе полагают $\{f^1(t), f^2(t)\} \in L_2(\tilde{T})$, $\tilde{T} \subseteq [0 \div 2\pi]$.

Итак, в методе Ван-дер-Поля для перехода к системе (10.6) решается задача аппроксимации в $L_2(0 \div 2\pi)$ [6].

Завершающим звеном является рассмотрение первого приближения в задаче аппроксимации. Таким образом, процедура усреднения в методе Ван-дер-Поля представляет собой первое приближение в задаче аппроксимации в $L_2(0 \div 2\pi)$.

Резюме: 1. Метод Ван-дер-Поля является методом второго уровня корректности. В нем осуществляется переход от системы первого уровня, задаваемой моделью (10.1), к системе второго уровня, задаваемой моделью (10.5).

2. Дополнительно модель второго уровня (10.5) редуцируется к более простой модели (10.3) путем вычисления первого приближения в задаче аппроксимации в $L_2(0 \div 2\pi)$.

§ 10.3. Основные идеи метода усреднения

Недостатки метода Ван-дер-Поля заключаются в отсутствии общности (переход $\{x, y\} \rightarrow \{a, \varphi\}$ возможен только для систем типа (2.1)) и математического обоснования правомочности усреднения в модели (2.5).

Ситуация выглядит следующим образом: задачи нелинейной механики, как правило, изучаются в пространстве $C^n(I)$ и требование близости точных и приближенных решений в метрике $C^n(I)$ должно сопровождаться требованием близости правых частей точных и приближенных дифференциальных уравнений в той же метрике.

Именно этого и нет в методе Ван-дер-Поля. Незримо в методе постулируется, что близость правых частей в метрике $L_2(\tilde{T})$ на уровне моделей (10.5), (10.6) обеспечивает близость приближенных и точных решений в $C^n(I_1)$ ($I_1 \subseteq [0 \div T]$ и T — сколь угодно большое число). Ясно, что такое постулирование без глубокого математического обоснования неубедительно.

Именно в этом аспекте и были сформулированы основные проблемы метода усреднения.

С точки зрения теории предельной корректности представляют интерес следующие проблемы:

1. Доказательство возможности получить качественные асимптотические решения первого приближения на основе усреднения правых частей дифференциальных уравнений модели второго уровня путем решения задачи аппроксимации первого приближения в $L_2(\tilde{T})$.

2. Определение условий, обеспечивающих качественные асимптотические решения.

3. Развитие метода, дающего возможность получить качественные асимптотические решения любого (m -го) приближения

в классе гладких функций на основе аппроксимации правых частей дифференциальных уравнений модели второго уровня в пространстве $L_2(I)$.

Отметим, что Н. Н. Боголюбов [47] положительно решил третью проблему и дал строгое математическое обоснование метода усреднения. Это обоснование в основном касалось решения двух проблем:

а) определение условий, при выполнении которых разность между решением точной системы дифференциальных уравнений и решением соответствующей ей усредненной системы для достаточно малых значений параметра ε становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но на конечном интервале времени;

б) установление соответствия между различными свойствами решений точных и усредненных уравнений, зависящими от их поведения на бесконечном интервале времени, в частности установление соответствия между периодическими решениями точной и усредненной систем и свойств притяжения или близости решений.

Рассмотрим основные идеи и результаты метода усреднения на примере системы S , описываемой дифференциальным уравнением в векторной форме

$$\dot{x} = \varepsilon F(x, t), \quad x \in R^n, \quad t \in [0 \div \infty). \quad (10.7)$$

Вместе с системой S введем систему второго уровня S_1 , описываемую уравнением

$$\dot{\xi} = \varepsilon F_1(\xi), \quad \xi \in R^n, \quad t \in [0 \div \infty). \quad (10.8)$$

В методе усреднения исходным является постулат: существует отображение, переводящее систему $S_1 \rightarrow \tilde{S}$ и обеспечивающее близость вектора \tilde{x} пространства состояний системы \tilde{S} к вектору x системы S при любых $t \in [0 \div T)$ (T — сколь угодно большое значение) с произвольной степенью точности в метрике $C(I_1)$ ($I_1 \in [0 \div T)$) относительно малого параметра ε .

З а м е ч а н и е. В уравнении (10.8) существенно то, что время t не входит явно в его правую часть (система S_1 автономна).

Теперь в условиях выполнимости постулата возникает вопрос о практическом методе построения системы (10.8).

В силу свойств регуляризирующего конструктора имеем

$$\tilde{x} = (PK) \xi. \quad (10.9)$$

Возьмем асимптотическое разложение (10.9) в виде

$$\tilde{x} = \xi + \varepsilon \bar{F}_1(t, \xi) + \varepsilon^2 \bar{F}_2(t, \xi) + \dots + \varepsilon^n \bar{F}_n(t, \xi) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (10.10)$$

Используя (10.10), уравнение (10.8) можно записать так:

$$\dot{\xi} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^n P_n(\xi) + \varepsilon^{n+1} R(t, \xi). \quad (10.11)$$

Пренебрегая в (10.11) слагаемым $\varepsilon^{n+1}R(t, \xi)$, получаем «усредненное» уравнение n -го приближения.

Набор $\{\bar{F}_\alpha(t, \xi)\}$ находится с помощью формализма, развитого Н. Н. Боголюбовым, а набор $\{F_0(\xi), P_\alpha(\xi)\}$ — путем усреднения правых частей (10.7) после подстановки в нее (10.10).

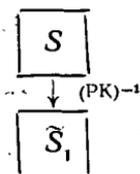
Для более четкой формулировки основных идей метода усреднения введем в рассмотрение еще систему \tilde{S}_1 с вектором пространства состояний $\tilde{\xi}$, определяемым соотношением

$$\tilde{\xi} = (PK)^{-1}x. \quad (10.12)$$

Соответственно математическую модель системы \tilde{S}_1 определим в виде

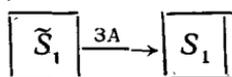
$$\dot{\tilde{\xi}} = \varepsilon \bar{F}_1(\tilde{\xi}, t), \quad \tilde{\xi} \in R^n, \quad t \subseteq [0 \div \infty). \quad (10.13)$$

Первая идея метода усреднения состоит в переходе от системы S к системе \tilde{S}_1 (второго уровня):

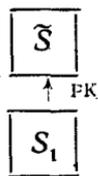


Вторая идея состоит в переходе от системы \tilde{S}_1 к системе S_1 с помощью задачи аппроксимации (ЗА) в $L_2(0, 2\pi)$:

$$\rho_{L_2}^*[\bar{F}_1(\tilde{\xi}, t), F_1(\xi)] = \min_{\tilde{F}_1(\tilde{\xi})} \rho_{L_2}[\tilde{F}_1(\tilde{\xi}, t), F_1(\xi)].$$



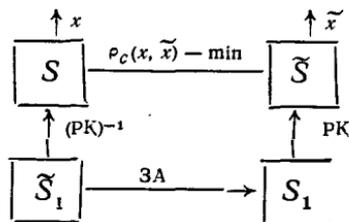
Переход от системы S_1 к системе \tilde{S} осуществляется с помощью (10.9), (10.10):



После этого перехода возникает проблема доказательства близости x и \tilde{x} в метрике

$$\rho_c(x, \tilde{x}) = |x(t) - \tilde{x}(t)|.$$

В целом весь цикл метода можно записать так:



З а м е ч а н и я: 1. В прикладных проблемах очень часто наибольший интерес представляет задача вычисления асимптотики первого приближения (см. первую проблему Н. Н. Боголюбова), в связи с чем наибольшее развитие получил метод усреднения с математической моделью второго уровня вида

$$\dot{\xi} = \varepsilon F_0(\xi).$$

Именно для этого случая доказана известная теорема Н. Н. Боголюбова [47] (см. § 10.5).

2. Четко переход к системе второго уровня \tilde{S}_1 просматривается в методе Ван-дер-Поля, однако в методе усреднения Боголюбова этот этап явно не выделен (особенно для системы первого приближения, когда $x \rightarrow \xi$).

По существу метод Боголюбова можно было бы изложить и без использования концепции второго уровня корректности, однако, имея в виду всю группу реализаций идеи усреднения, более удобно рассматривать метод усреднения как метод второго уровня корректности.

§ 10.4. Формализм метода усреднения

Рассмотрим кратко формализм метода усреднения Боголюбова, следуя в основном монографии Ю. А. Митропольского [47].

Разберем систему S , описываемую уравнением (10.7). Функцию $F(x, t)$ запишем в виде

$$F(x, t) = \sum_v e^{ivt} F_v(x) \quad (10.14)$$

и для некоторой (пока произвольной) функции возьмем такое же представление

$$P(x, t) = \sum_v e^{ivt} P_v(x).$$

Вводя оператор усреднения M по явно входящему времени, имеем

$$M_t \{P(x, t)\} = P_0(x).$$

Дополнительно вводя интегрирующий оператор \sim , получаем

$$\bar{P}(x, t) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} P_{\nu}(x),$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \tilde{F}, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F - M_t(F).$$

Если принять представление (10.14) для (10.7), то будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F_0(x) + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t} F_{\nu}(x). \quad (10.15)$$

Полагая, что сумма в правой части (10.15), дающая суммирующие члены, приводит только к малым вариациям x около ε и не оказывает влияния на систематическое поведение x (в области отсутствия резонанса), приходим к системе первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon F_0(\xi) = \varepsilon M_t[F(t, \xi)]. \quad (10.16)$$

Во втором приближении учитывается первый член суммы по ν в представлении для x , что дает

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} F_{\nu}(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{F}(t, \xi).$$

Это в итоге приводит к уравнению второго приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{F[t, \xi + \varepsilon \tilde{F}(t, \xi)]\} \quad (10.17)$$

или с точностью до членов второго порядка малости по ε включительно

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \left\{ F(t, \xi) + \varepsilon \left[\tilde{F}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] F(t, \xi) \right\}. \quad (10.18)$$

В приведенном формализме четко не просматривается элемент асимптотической упорядоченности (не видно, что отброшенные члены в первом и т. д. приближениях имеют более высокий порядок малости по ε по сравнению с удержанными членами). Это можно показать на уровне уравнения (10.8).

Заменим переменные по формуле

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{F}(t, \xi). \quad (10.19)$$

Учитывая, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t},$$

и производя ряд преобразований, получаем

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} \right)^{-1} F_0(\xi) + \varepsilon \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} \right)^{-1} [F(t, \xi + \varepsilon \tilde{F}(t, \xi)) - F(t, \xi)]. \quad (10.20)$$

Разлагая правую часть (10.20) в ряд по ε , имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon F_0(\xi) + \varepsilon^2 \left\{ -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} F_0(\xi) + \left[\tilde{F}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] F(t, \xi) \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (10.21)$$

Из (10.21) видно, что действительно первое приближение в асимптотическом решении описывается системой (10.16).

В настоящем параграфе мы очень кратко рассмотрели формализм усреднения, главным образом систему первого приближения. Более подробно формализм метода и его строгое обоснование изложены в цитированной выше монографии Ю. А. Митропольского.

§ 10.5. Теорема Н. Н. Боголюбова

Приведем формулировку первой теоремы Н. Н. Боголюбова, посвященной обоснованию метода усреднения. Эта теорема констатирует факт малости разности $|x(t) - \xi(t)|$ в первом приближении при определенных условиях.

Первая теорема Н. Н. Боголюбова. Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условиям:

а) для некоторой области D можно указать такие положительные постоянные μ и λ , что для всех вещественных значений $t \geq 0$ и для любых точек x, x', x'' из этой области выполняются неравенства

$$|F(t, x)| \leq \mu,$$

$$|F(t, x') - F(t, x'')| \leq \lambda |x' - x''|;$$

б) в этой области равномерно относительно x существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt = F_0(x),$$

тогда любым сколь угодно малым положительным ρ, η и сколь угодно большому L можно поставить в соответствие такое положительное ε_0 , что если $\xi = \xi(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon F_0(\xi),$$

определенное на интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области D вместе со всей своей ρ -окрестностью, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < L/\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta,$$

в котором $x = x(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(t, x),$$

совпадающее с $\xi(t)$ при $t=0$.

Доказательство теоремы содержится в монографии [47].

Для бесконечного интервала времени Н. Н. Боголюбовым доказана вторая основная теорема, формулировку которой мы приводить не будем.

З а м е ч а н и е. Существует глубокая связь первой теоремы Н. Н. Боголюбова с общей теорией предельной корректности, поскольку по существу ее основным результатом является установление факта предельной корректности системы первого приближения.

Глава 11

МЕТОДЫ ВКБ И ПЛГ

§ 11.1. Основы метода ВКБ

В главе 2 при изучении уровней корректности мы рассмотрели линейные уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + \lambda^2 \omega^2(t) x = 0. \quad (11.1)$$

Здесь $\lambda \gg 1$ — большой параметр, а $\omega^2 \gg \alpha > 0$.

Непосредственно на уровне модели (11.1) не удастся построить асимптотическое решение со шкалой $\{1/\lambda^\alpha\}$. Переход к системе \hat{S} с помощью преобразования

$$x_{1,2} = \exp \left[\pm i\lambda \int_0^t \omega(t) dt \right] z(t, \lambda) \quad (11.2)$$

приводит к уравнению

$$\frac{1}{\lambda} \ddot{z} \pm 2i\omega \dot{z} \pm i\dot{\omega}z = 0, \quad (11.3)$$

для которого можно построить нужное асимптотическое решение в области больших значений λ .

Этот пример достаточно ясно иллюстрирует основную идею метода ВКБ. На уровне модели первого уровня задача оказы-

вается некорректной (относительно предела $1/\lambda \rightarrow 0$), для регуляризации проблемы вводится преобразование

$$x = F(t, \lambda) z. \quad (11.4)$$

В результате преобразования новая математическая модель уже обладает корректностью (относительно предела $1/\lambda = 0$).

Для уравнения (11.1) доказана важная теорема [52].

Пусть функция $\omega^2(t)$ дважды дифференцируема на отрезке $[0, T]$ и существует такая постоянная $\alpha > 0$, что для любого $t \in [0, T]$ $\omega(t) \geq \alpha$. Тогда для любого $t \in [0, T]$ функция

$$x_{1,2} = \frac{c_{1,2}}{\sqrt{\omega(t)}} \exp \left[\pm i\lambda \int_0^t \omega(t) dt \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

является асимптотическим решением уравнения (11.1).

Как следует из этой теоремы, в методе ВКБ в качестве регуляризирующего конструктора выступает основная часть асимптотического решения первого приближения; это является второй особенностью данного метода.

Заметим, что этот факт характерен и для метода Ван-дер-Поля (см. гл. 10) и, по-видимому, в целом идея регуляризации с помощью асимптотического решения первого приближения носит более общий характер для методов второго уровня корректности.

Интересно, что имеется тесная связь между методами ВКБ и усреднения. Анализ этой связи приведен в монографии [52].

Отметим, что в методе ВКБ можно дать и другую интерпретацию идеи перехода ко второму уровню корректности. Проиллюстрируем это также на примере уравнения (11.1), записанно-го в другой форме:

$$\ddot{x} + \lambda^2 f(t) x = 0, \quad (11.5)$$

где $f(t)$ — знакопостоянная функция.

Введем в рассмотрение эталонное уравнение

$$\ddot{z} \pm z = 0. \quad (11.6)$$

Теперь возникает задача редукции уравнения (11.5) к (11.6), которую следует решать путем замены зависимого и независимого переменных:

$$t = t(\tau), \quad x = \sqrt{t'} z.$$

После этих замен уравнение (11.5) запишем в виде:

$$\ddot{z} + [\lambda^2 f \sqrt{t'} + \varphi(\tau)] z = 0, \quad (11.7)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{3}{4} \frac{(t'')^2}{(t')^2} - \frac{1}{2} \frac{t'''}{t'}.$$

Для полной эквивалентности (11.5) и (11.6) необходимо, чтобы

$$\lambda^2 f \sqrt{f'} + \varphi(\tau) = \pm 1.$$

При допущении

$$|\varphi(\tau)/f \sqrt{f'}| \sim O(1)$$

для получения первого приближения следует положить

$$\lambda^2 f \sqrt{f'} = \pm 1, \quad \tau = \pm \lambda \int_0^t \sqrt{f'(t)} dt. \quad (11.8)$$

Непосредственные вычисления показывают, что условие

$$|\varphi(\tau)/f \sqrt{f'}| \sim O(1)$$

действительно выполняется и первое приближение определяют соотношения (11.8).

Решение эталонного уравнения запишем в виде

$$z = \exp[\pm i\tau],$$

что снова приводит к ВКБ-решению.

Приведенные преобразования уравнения (11.5) к эталонному уравнению интересны с той точки зрения, что они позволяют посмотреть на процесс регуляризации как на процесс преобразования *а* и *н* *я* зависимых и независимых переменных.

Алгоритм получения асимптотического решения уравнения (11.5) достаточно подробно описан в главе 2, и на нем мы останавливаться не будем.

Рассмотрим некоторые интересные обобщения. Предварительно заметим, что уравнения типа

$$\omega^2(t) + f(t) = 0 \quad (11.9)$$

в методе ВКБ называются характеристическими.

Для более общего уравнения

$$\ddot{x} + \lambda^2 F(t, \lambda) x = 0,$$

где

$$F(t, \lambda) = f_0(t) + \frac{1}{\lambda} f_1(t) + \dots + O\left(\frac{1}{\lambda^n}\right),$$

асимптотическое решение представим в виде:

$$x = \exp\left[\lambda \int_0^t \mu(t) dt\right] \left[z_0(t) + \frac{1}{\lambda} z_1(t) \dots \right],$$

$$\mu(t) = \pm i \sqrt{f_0(t)}, \quad (\mu^2 + f_0) z_0 = 0,$$

$$(\mu^2 + f_0) z_1 = -(2\dot{z}_0 \mu + \dot{\mu} z_0 + f_1 z_0), \quad (\mu^2 + f_0) z_2 = L z_1$$

(11.10)

.....

В приведенных выше примерах рассматривались однородные уравнения, однако в аспекте анализа метода ВКБ представляет интерес изучение неоднородного уравнения. Особенно интересен здесь вопрос о корректности уравнения относительно частного решения неоднородного уравнения. Другими словами, однородная часть решения неоднородного уравнения типа (11.1) (и его всевозможных обобщений) определяется методом ВКБ.

Введение метода ВКБ связано с некорректностью предела относительно однородной части общего решения.

При анализе неоднородной части решения возникает вопрос: обладает ли предел $1/\lambda=0$ корректностью относительно неоднородной части решения.

Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Для иллюстрации рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2\lambda a \dot{x} + \lambda^2 \omega^2 x = \lambda^s f(t). \quad (11.11)$$

Будем искать решение (11.11) в виде

$$x = \lambda^{s-2} x_0 + \lambda^{s-3} x_1 + \dots + O(\lambda^N). \quad (11.12)$$

Обычным путем получаем:

$$\begin{aligned} x_0 &= f/\omega^2, & x_2 &= -(2a\dot{x}_1 + \ddot{x}_0)/\omega^2, \\ & & \dots & \dots \dots \dots \\ x_1 &= -2a\dot{x}_0/\omega^2, & x_n &= -(2a\dot{x}_{n-1} + \ddot{x}_{n-2})/\omega^2. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Как следует из (11.13), уравнение (11.11) допускает асимптотическое решение в регулярном классе корректности K_1 , и, следовательно, предел $1/\lambda=0$ для неоднородной части решения оказывается корректным. Это интересный факт теории предельной корректности. Получается, что если в системе существуют однородная и неоднородная части решения, то корректные пределы для этих частей могут не совпадать (!).

Для разъяснения этого вопроса приведем теорему [52].

Если функции $f(t)$ и $\omega(t)$ достаточное количество раз дифференцируемы на отрезке $[0, T]$ и, кроме того, существует такая положительная постоянная α , что для любых $t \in [0, T]$

$$\omega(t) \geq \alpha,$$

то уравнение

$$\ddot{x} + \lambda^2 \omega^2 x = \lambda^s f(t)$$

допускает частное решение вида

$$x = \lambda^{s-2} [x_0 + \lambda^{-2} x_1 + \dots + \lambda^{n+2} x_{n-3} + \lambda^{-n} \eta(t, \lambda)],$$

где функции x_i определяются равенствами:

$$x_0 = \frac{1}{\omega^2}, \quad x_1 = -\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{f}{\omega^2} \right),$$

.....

и функция $\eta(\lambda, t)$ ограничена для любого $t \in [0, T]$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

§ 11.2. Особые случаи в методе ВКБ

Выше мы рассмотрели основные идеи метода ВКБ, полагая, что характеристическое уравнение не имеет нулевых корней внутри рассматриваемого временного интервала. Это наиболее простая ситуация, тогда как очень часто возникает потребность рассмотрения асимптотики в окрестности точки тривиального решения (точки возврата). В этом случае могут возникать совершенно новые эффекты, которые невозможно описать асимптотическими решениями, и вообще эти решения оказываются непригодными в данных областях. Эти особые случаи требуют более аккуратного анализа, однако общее существо метода ВКБ сохраняется неизменным.

Для иллюстрации особенностей анализа в особых случаях подробно рассмотрим один пример [52].

Пусть функционирование системы S описывается уравнением

$$\ddot{x} + [\lambda^2 a(t) + B(t)] x = 0. \quad (11.14)$$

Введем эталонное уравнение

$$\frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} + f(\tau) \Phi = 0, \quad (11.15)$$

причем полагаем, что структура функции $f(\tau)$ допускает представление решения уравнения (11.15) через известные функции.

Следуя идее перехода к системе второго уровня, запишем

$$x = \Phi[\tau(t)] z(t, \lambda). \quad (11.16)$$

Уравнение для $z(t, \lambda)$ будет иметь вид

$$\ddot{z} \Phi + 2\dot{z} \Phi_{\tau} \dot{\tau} + z [\Phi_{\tau\tau} \dot{\tau}^2 + \Phi_{\tau} \ddot{\tau} + (\lambda^2 a + B) \Phi] = 0$$

или с учетом (11.15)

$$\ddot{z} \Phi + 2\dot{z} \Phi_{\tau} \dot{\tau} + z \{ [-\dot{\tau}^2 f(\tau) + \lambda^2 a] \Phi + \Phi_{\tau} \ddot{\tau} + B \Phi \} = 0. \quad (11.17)$$

Для выбора функции $\tau(t)$ возьмем условие

$$\frac{d\tau}{dt} \sqrt{f(\tau)} = \lambda \sqrt{a(t)}. \quad (11.18)$$

Если записать решение характеристического уравнения (11.18) в виде

$$\tau(t) = \lambda^s \Psi(t),$$

то (11.17) можно записать так:

$$\ddot{\Phi} + 2\dot{z}\Phi_\tau \lambda^s \dot{\Psi} + z(\Phi_\tau \lambda^s \ddot{\Psi} + B\Phi) = 0. \quad (11.19)$$

Теперь можно постулировать решение уравнения (11.19) в виде

$$z = z_0 + \lambda^{-s} z_1 + \lambda^{-2s} z_2 + \dots + O\left(\frac{1}{\lambda^{Ns}}\right). \quad (11.20)$$

В силу (11.19) функции z_i определяются из рекуррентной последовательности:

$$\begin{aligned} 2\dot{\Psi}z_0 + z_0\ddot{\Psi} &= 0, \\ 2\dot{\Psi}z_1 + z_1\ddot{\Psi} &= -\frac{\ddot{z}_0\Phi + Bz_0}{\Phi_\tau}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (11.21)$$

Причем первое уравнение дает решение

$$z_0 = 1/\sqrt{\ddot{\Psi}}.$$

Построив формальное решение, мы приходим к вопросу о фактическом существовании асимптотического решения типа (11.20). Положительное решение этого вопроса тесно связано с функцией $f(\tau)$ в (11.18).

При произвольном выборе $f(\tau)$ ряд (11.20) может не иметь реального содержания, и только при определенном выборе $f(\tau)$ он может отвечать существу дела.

Каковы же условия этого определенного выбора $f(\tau)$? Дело в том, что эталонное уравнение должно давать решения, в некотором смысле «близкие» к решению исходного уравнения (11.14).

Для получения решений в окрестности точек возврата требование «близости» сводится к требованию одинаковой структуры особенностей функций $a(t)$ и $f(\tau)$.

Рассмотрим два случая:

- а) $a(t) = tg(t), \quad g(0) \neq 0;$
- б) $a(t) = t^2g(t), \quad g(0) \neq 0.$

Эталонные уравнения соответственно будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \tau\Phi &= 0, \\ \text{б) } \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \tau^2\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Характеристические уравнения в этих случаях запишем так:

$$\frac{d\tau}{dt} \sqrt{\tau} = \lambda \sqrt{tg(t)}, \quad \frac{d\tau}{dt} \tau = \lambda t \sqrt{g(t)}. \quad (11.23)$$

Интегрируя (11.23), имеем:

$$а) \tau(t) = \lambda^{2/3} \left[\frac{3}{2} \int_0^t \sqrt{tg(t)} dt \right]^{2/3}, \quad \Psi(t) = \left[\frac{3}{2} \int_0^t \sqrt{tg(t)} dt \right]^{2/3}; \quad (11.24)$$

$$б) \tau(t) = \lambda^{1/2} \Psi(t), \quad \Psi(t) = \sqrt{2t \int_0^t \sqrt{g(t)} dt}.$$

От решений (11.24) легко перейти к ВКБ-решениям, которые будут давать асимптотику в окрестности точек возврата.

Заметим, что метод ВКБ достаточно хорошо разработан для широкого класса задач нелинейной механики и теоретической физики. Приведенные выше простые примеры всего лишь служат цели анализа метода ВКБ с позиций развиваемой теории. С необходимой полнотой этот метод изложен в монографиях [44, 52, 107].

§ 11.3. Идея деформированных координат в методе ПЛГ

В задачах механики сплошной среды большое распространение получил метод деформированных координат (ПЛГ). Очень часто в этих задачах возникают точки локальной некорректности. Устранение этих затруднений, в смысле получения асимптотических решений высших приближений, и привело к возникновению и развитию данного метода. Обсудим кратко ситуацию для этого класса задач (см. также введение).

Для некоторой конкретной задачи механики сплошной среды можно поставить цель: получение асимптотического решения, включающего несколько приближений. Рассуждая формально, можно взять шкалу метода малого параметра $\{\epsilon^\alpha\}$ и построить решение. Без конкретных вычислений создается впечатление, что цель достигнута и построенное формальное решение отвечает исходным требованиям. Однако часто это не так.

Модель первого приближения нередко имеет точки локальной некорректности (см., например, гл. 3), и в окрестности этих точек высшие приближения не уточняют, а, наоборот, ухудшают решение (это в определенной степени аналогично ситуации метода ВКБ в окрестности точек возврата). Для исправления указанного дефекта метода малого параметра и вводится деформирование координат (области Ω).

Рассмотрим простой пример Лайтхилла

$$(x + \varepsilon f) \frac{df}{dx} + f = 1, \quad f(1) = 2. \quad (11.25)$$

Разложение со шкалой $\{\varepsilon^\alpha\}$ дает формальное решение

$$f \sim \frac{1+x}{x} - \varepsilon \frac{(1-x)(1+3x)}{2x^2} + \varepsilon^2 \frac{(1+x)(1-x)(1+3x)}{2x^5} + \dots \quad (11.26)$$

Это разложение не будет равномерно пригодным вблизи $x=0$. Заметим, что точное решение

$$f = \sqrt{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{1+x}{\varepsilon} + 4} - \frac{x}{\varepsilon} \quad (11.27)$$

конечно при $x=0$.

Дело в том, что уравнение (11.25) имеет особенность вдоль линии $x=-\varepsilon f$, а линейризация переносит эту особенность в точку $x=0$, в результате чего выше приближения только ухудшают результат. Простые соображения о сдвиге особенности приводят к идее деформации координаты x .

Вводя в рассмотрение новую вспомогательную координату s , положим:

$$f(x, \varepsilon) = f_1(s) + \varepsilon f_2(s) + \varepsilon^2 f_3(s) + \dots + O(\varepsilon^n), \\ x = s + \varepsilon x_2(s) + \varepsilon^2 x_3(s) + \dots + O(\varepsilon^n),$$

теперь получаем

$$(sf_1)' = 1, \\ (sf_2)' = f_1'(sx_2' - x_2 - f_1) = \left[x_2(1-f_1) - \frac{1}{2} f_1^2 \right]',$$

тогда

$$f_1(s) = (1+s)/s, \quad f_1(1) = 2; \quad (11.28)$$

$$f_2(s) = \frac{c}{s} - \frac{1}{s^2} \left[x_2(s) + \frac{1+2s}{2s} \right].$$

Выдвинув требование о том, чтобы $f_2(s)$ имела не большую особенность, чем $f_1(s)$, получаем условие для выбора постоянной c :

$$\frac{1+2s}{2s^2} + \frac{x_2(s)}{s} = \text{const}. \quad (11.29)$$

Однако это условие не обеспечивает единственный выбор постоянной c , и необходимо дополнительное условие. Принимая в (11.29) $\text{const}=1$, получаем

$$x_2 = -(1+2s)/2s. \quad (11.30)$$

Результат (11.30) приводит к первому приближению

$$f(x, \varepsilon) \sim \sqrt{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{1+x}{\varepsilon} + 1} - \frac{x}{\varepsilon}.$$

Принимая в качестве дополнительного условия отсутствие деформации в точке $x=1$, имеем:

$$x_2 = (3s^2 - 1 - 2s)/2s,$$

$$f(x, \varepsilon) \sim (1+s)/s, \quad x \sim s + \varepsilon(3s^2 - 1 - 2s)/2s.$$

В этом случае приходим к точному решению в первом приближении.

Рассмотрение примера позволяет сделать некоторые интересные заключения:

1) как правило, реализация идеи деформации координат (области Ω) в конкретных задачах опирается на физический анализ;

2) выбор функции деформации должен опираться на какой-либо достаточно общий принцип;

3) использование определенного принципа может не привести к единственному решению, и окончательный выбор требует привлечения дополнительных условий.

Для задач с точками локальной некорректности Лайтхилл выдвинул следующий принцип деформирования [22]: *приближения высших порядков имеют не большую особенность, чем первое приближение.*

Для более широкого класса задач этот принцип, по-видимому, будет не всегда пригоден, в связи с чем в ряде работ автора рассмотрен более общий подход, связанный в основном с задачей «полной аппроксимации». Эта задача подробно будет рассмотрена в следующей главе, здесь мы ограничимся изложением самых общих сведений.

В исходных переменных задача эволюции системы имеет вид (см. гл. 1)

$$\varphi(g) = L(\varepsilon)\varphi_0(g), \quad g \in \Omega.$$

Напомним, что оператор эволюции также зависит от вектора g .

Введем в рассмотрение оператор деформации P

$$\tilde{g} = Pg.$$

Теперь можно записать задачу эволюции

$$\varphi(\tilde{g}) = \tilde{L}(\tilde{g}, \varepsilon)\varphi_0(\tilde{g}), \quad \tilde{g} \in \tilde{\Omega}.$$

Асимптотические разложения операторов P и \tilde{L} запишем в обычном виде:

$$P = 1 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots + O(\varepsilon^n),$$

$$\tilde{L}(\tilde{g}, \varepsilon) = 1 + \varepsilon \tilde{L}_1(\tilde{g}) + \varepsilon^2 \tilde{L}_2(\tilde{g}) + \dots + O(\varepsilon^n). \quad (11.31)$$

Далее, если при выборе P_1 исходить из условия

$$\tilde{L}_2(\tilde{g}) \equiv 0,$$

то в первом приближении уже обеспечивается асимптотика вида

$$\tilde{L}(\tilde{g}, \varepsilon) = 1 + \varepsilon \tilde{L}_1(\tilde{g}) + O(\varepsilon^2) \quad (11.32)$$

и можно принять P_2 на основе условий

$$\tilde{L}_2(\tilde{g}) \equiv 0, \quad \tilde{L}_3(\tilde{g}) \equiv 0. \quad (11.33)$$

Таким образом, мы приходим к достаточно общему принципу деформирования, суть которого сводится к требованию улучшения асимптотики первого приближения.

В случае систем, описываемых дифференциальными уравнениями, идеи, родственные приведенной выше, получили достаточно глубокое развитие в работах А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко [18].

В механике сплошной среды вычислительные трудности и соображения, связанные с точностью исходной математической модели, приводят к нецелесообразности конкретных вычислений выше (11.32), в связи с чем и возникла проблема усеченных асимптотических алгоритмов и связанная с ней задача «полной аппроксимации».

З а м е ч а н и е. Метод деформируемых координат обладает регуляризирующими свойствами не только в задачах с точками локальной некорректности, но и в других задачах с сингулярными возмущениями, в связи с чем он и получил широкое развитие и применение.

Глава 12

УСЕЧЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ И ЗАДАЧА ПОЛНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

§ 12.1. Задача полной аппроксимации в теории умеренных возмущений

При формулировании условий предельной корректности нами в основном использовалась достаточно общая конструкция в виде обобщенного оператора T_Φ . В реальных условиях при выборе асимптотических алгоритмов и в связи с вопросом реальной возможности получения результатов более высоких приближений необходимо иметь более частные критерии, позволяющие решить ту же задачу и допускающие их конструктивное

использование при оптимизации алгоритмов. Особенно явно чувствуется потребность в этом тогда, когда для произвольных возмущений существует область Ω , $\Phi \in E(\Omega)$, а в теории малых возмущений принята другая область Ω_0 .

Вопрос о реальной возможности получить результаты более высоких приближений заслуживает внимания в связи с тем, что задача построения формальных асимптотических разложений несравненно проще задачи конкретных вычислений.

Поэтому в достаточно содержательных задачах математической физики редко проводятся вычисления выше второго порядка. Это обстоятельство можно разумным образом использовать, а именно: априори зная, что в конкретных вычислениях не удастся продвинуться выше второго приближения, можно поставить задачу об определении оптимального усеченного (асимптотического) алгоритма, позволяющего получать информацию, эквивалентную по точности второму приближению регулярного асимптотического метода.

Оптимальный усеченный асимптотический алгоритм заранее ограничивается определенной асимптотической оценкой (на уровне $O(\varepsilon^2)$), но реализует более эффективную и простую процедуру выведения асимптотического решения.

В аспекте исследования задачи об оптимальных асимптотических усеченных алгоритмах в работах автора [65, 68, 69] была поставлена задача «полной аппроксимации».

Начнем с обсуждения условий существования равномерной аппроксимации одной краевой задачи другой.

Пусть Ω и Ω_0 — области евклидова пространства R^n с границами B и B_0 . Рассмотрим два множества в пространстве $E(\Omega_i)$:

$$\Phi \subset E(\Omega), \quad \Phi_0 \subset E(\Omega_0).$$

Пусть элементы множества удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$A\Phi = 0, \quad g \in \Omega;$$

$$A_0\Phi_0 = 0, \quad g \in \Omega_0,$$

а на границе B_i — граничным условиям

$$K\Phi = 0, \quad g \in B;$$

$$K_0\Phi_0 = 0, \quad g \in B_0.$$

Пусть также P — отображение $\Omega \rightarrow \Omega_{01}$, B_{01} — граница области Ω_{01} . Введем в пространствах $E(\Omega \cap \Omega_{01})$ и R^n метрики:

$$\rho_E(P\Phi; \Phi_0), \quad \rho_R(B_0; B_{01}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_1^i - x_2^i)^2},$$

$$x_1^i \in B_0, \quad x_2^i \in B_{01},$$

где точки $g(x_1^i)$ и $g(x_2^i)$ — пересечение соответственно поверхностей B_0 и B_{01} нормально к поверхности B_{01} .

Будем считать, что функция Φ_0 дает равномерную аппроксимацию в области Ω_0 :

$$P\Phi = \Phi_0 + O(\varepsilon^\gamma), \quad g \in \Omega_0.$$

Если выполняются условия

$$\rho_E(P\Phi; \Phi_0) \in O(\varepsilon^\alpha), \quad \alpha > 0;$$

$$\rho_R(B_0; B_{01}) \in O(\varepsilon^\beta), \quad \beta > 0,$$

то, для того чтобы асимптотические методы давали эффективные алгоритмы определения оператора $L(\varepsilon)$, упорядоченному множеству индексов i операторов L_i в асимптотическом разложении $L(\varepsilon)$ должны соответствовать множества A_{α_i} и A_{β_i} , причем при $i_n > i_k$, $\alpha_{i_n} > \alpha_{i_k}$ и $\beta_{i_n} > \beta_{i_k}$. Таким образом, в эффективных алгоритмах асимптотических методов следующее приближение должно увеличивать показатели α и β .

Естественным условием, необходимым для осуществления алгоритма с ростом показателя γ , является условие $P \neq 1$. Теперь ясна общность метода деформированных координат, в котором используются деформации координат ($P \neq 1$) для получения равномерных приближений.

Положительный ответ на вопрос о разрешимости задачи «полной аппроксимации» (о существовании отображения P) дает необходимое условие разрешимости задачи оптимальным усеченным асимптотическим алгоритмом, которое определяет первый этап.

В нелинейных граничных задачах математической физики для двух- или трехмерного евклидова пространства часто главной задачей асимптотических методов является задача получения удовлетворительных результатов в низших приближениях. Это связано с трудностями фактического получения решений высших приближений, в связи с чем наибольшее распространение имеют теории первого приближения (в основном линейные). Обычно линеаризация осуществляется с отображением $P \equiv 1$ (в физическом пространстве), но в связи с проблемой P -отображений весьма интересен вопрос о выборе отображения P_i , дающего в первом приближении более качественную информацию, чем классические линейные теории.

Эта задача поставлена в указанных выше работах автора и названа задачей полной аппроксимации.

Задача полной аппроксимации — это задача выбора отображения P и операторов A_0 и K_0 , обеспечивающих наибольший показатель γ в первом приближении. Условия полной аппрок-

симации:

$\max \alpha, \max \beta$ при $i = 1$.

В некоторых задачах можно использовать одно условие:

$$\tilde{L}_2 \equiv 0, \quad g \in \Omega_1; \quad \Omega_1 \subset \Omega.$$

Естественно, важен вопрос о разрешимости задачи полной аппроксимации. Если доказана разрешимость этой задачи, то алгоритм ее решения и дает оптимальный усеченный асимптотический алгоритм. Как правило, метод доказательства разрешимости задачи полной аппроксимации является конструктивным, и он же дает оптимальные усеченные алгоритмы.

Задача полной аппроксимации в некоторых задачах теории потенциала ускорений оказывается разрешимой, что позволило получить ряд интересных решений нелинейных задач.

Следует указать на тесную связь задачи полной аппроксимации с методом ускоренной сходимости в нелинейной механике [18] и методом ПЛГ [22] (деформированных координат). Но в задаче полной аппроксимации ставится вопрос о выборе оптимального отображения исходя из априорного допущения усеченности алгоритма. В основном при анализе задачи полной аппроксимации анализируется отображение P , осуществляющее отображение физического пространства R^n в пространстве аппроксимации R_1^n . Задача выбора отображения P и есть основная в задаче полной аппроксимации.

Асимптотический метод исследования нелинейных краевых задач, основанный на задаче полной аппроксимации, включает несколько этапов:

- 1) исследование разрешимости задачи полной аппроксимации. Выбор отображения P ;
- 2) формулировка краевой задачи в пространстве аппроксимации R_1^n ;
- 3) формальное решение краевой задачи в пространстве аппроксимации R_1^n ;
- 4) переход в физическое пространство R^n . Нелинейные интегральные уравнения;
- 5) исследование и решение нелинейных интегральных уравнений;
- 6) конечная информация.

В настоящее время в определенной мере таким образом изучены два класса нелинейных задач:

а) нелинейные краевые задачи, содержащие нелинейный дифференциальный оператор;

б) нелинейные краевые задачи, содержащие линейный дифференциальный оператор и нелинейные граничные условия (или неизвестную заранее свободную границу).

Обсудим кратко задачи класса а).

Пусть в физическом пространстве R^n сформулирована краевая задача:

$$T\varphi = 0, \quad g \in \Omega, \quad \varphi \in E(\Omega);$$

$$L\varphi = F(g), \quad g \in S, \quad \Omega \subset R^n,$$

где $L\varphi$ — линейный оператор краевых условий, S — известная часть границы области.

Полагаем, что оператор $T\varphi$ обладает свойством

$$T\varphi = T_0\varphi + \varepsilon T_1\varphi, \quad \varepsilon < 1;$$

$$\{\|\varphi\|, \|T_0\varphi\|, \|T_1\varphi\|\} \sim O(1)$$

и $T_0\varphi$ и $T_1\varphi$ — соответственно линейный и нелинейный дифференциальные операторы.

Если существует отображение P , при котором

$$T\varphi \xrightarrow{P} T_2\varphi + O(\varepsilon^\alpha), \quad \alpha > 1,$$

и $T_2\varphi$ — линейный дифференциальный оператор, то будем говорить, что задача полной аппроксимации разрешима для оператора $T\varphi$. Заметим, что вопрос о разрешимости задачи полной аппроксимации формулируется для дифференциального оператора $T\varphi$, а не для краевой задачи.

На втором этапе формулируется краевая задача в пространстве аппроксимации.

Пусть в пространстве R_1^n задача сформулирована в виде:

$$T_2\varphi = 0, \quad g \in \Omega_1, \quad \varphi \in E(\Omega_1);$$

$$L_1\varphi = F_1(g), \quad g \in S_1, \quad \Omega_1 \subset R_1^n,$$

где $L_1\varphi$ — нелинейный дифференциальный оператор краевых условий, S_1 — в общем случае неизвестная часть границы области Ω_1 . Особенность этой задачи состоит в том, что она сформулирована для линейного дифференциального оператора, но содержит нелинейности в граничных условиях.

Идея метода становится ясной на третьем этапе исследования. При развитии формализма решения последней задачи используется идея регуляризации Карлемана — Векуа.

Граничное условие переписываем в виде

$$L\varphi = F_1(g) - (L_1\varphi - L\varphi) = F_2(g, \varphi), \quad g \in S_1.$$

Первоначально предположим, что правая часть граничного условия также неизвестна и зависит от φ и S_1 — неизвестная граница. Полагая, что $F_2(g)$ и S_1 известно, мы строим формализм решения линейной задачи:

$$T_2\varphi = 0, \quad g \in \Omega_1;$$

$$L\varphi = F_2(g), \quad g \in S_1.$$

Пусть $T_2\varphi$ обладает свойствами, обеспечивающими существование решения в виде интегрального оператора

$$\varphi = \int_{S_1} \gamma(p) K(p, g) ds$$

(для простоты полагаем, что φ — скаляр).

По граничному условию задачи в пространстве аппроксимации получаем интегральное уравнение

$$\int_{S_1} \gamma(p) K_1(p, g) ds = F_2(g, \varphi), \quad g \in S_1;$$

$$K_1(p, g) = LK(p, g).$$

Решая это уравнение, мы находим функцию $\gamma(p)$.

При переходе в физическое пространство на четвертом этапе обращаем внимание на то, что правая часть интегрального уравнения зависит и от φ , и, следовательно, $\gamma(p) \equiv \gamma(p, \varphi)$.

Нелинейное интегральное уравнение задачи строится по граничному условию в физическом пространстве

$$\int_{S_1} \gamma(p, \varphi) \bar{K}_1[g(\varphi), p] = F(g), \quad g \in S;$$

$$K_1[g(\varphi), p] = LK(g(\varphi), p),$$

где $g(\varphi)$ — образ точки $g \in \Omega_1$ в физическом пространстве.

Приведенное обсуждение показывает, что формализм метода оказывается несколько сложным и его результатом является нелинейное интегральное уравнение.

Существует ряд методов сведения нелинейной краевой задачи к нелинейным уравнениям, имеющим более простой формализм. Например, можно исходную задачу записать таким образом:

$$T_0\varphi = -\varepsilon T_1\varphi, \quad g \in \Omega;$$

$$L\varphi = 0, \quad g \in S$$

и применить идею регуляризации Карлемана — Векуа непосредственно при выборе решения уравнения. Но в этом случае интегральный оператор, дающий решение, будет иметь вид

$$\varphi = \int_S \gamma(p) K(p, g) ds + \int_{\Omega} \chi(\varphi) G(p, g) ds$$

и в нелинейном интегральном уравнении будет содержаться «неприятный» второй член (интеграл по области Ω). Именно задачу ликвидации интегралов по области Ω и решает формализм асимптотического метода полной аппроксимации. Наибольшее развитие обсуждаемый метод получил в задачах движения тела с большой дозвуковой скоростью.

§ 12.2. Метод полной аппроксимации в теории околосвуковых течений газа

В первых работах автора [65, 68, 69] была показана возможность применения метода к исследованию дозвуковых течений и решено несколько простейших задач.

Позже Г. Ф. Сигалов доказал две теоремы о разрешимости задачи полной аппроксимации для нелинейных дифференциальных операторов дозвуковой газовой динамики (стационарный и нестационарный потоки) [91—94]. Эти результаты обосновали применимость метода в задачах дозвуковой газовой динамики. Он развил также алгоритмическую сторону метода и получил решения ряда интересных задач. Приведем эти теоремы.

Теорема об асимптотической связи для стационарных течений. Пусть элементы множества $E \in C^2(\Omega)$ удовлетворяют уравнению

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \varphi_x (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + 2\varphi_x \varphi_{xx} + 2\varphi_{yx} \varphi_y \right] + O(\varepsilon^3), \quad g \in \Omega, \quad \varphi \in E(\Omega), \quad (12.1)$$

а элементы множества $E_1 \in C^2(\Omega_1)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad g_1 \in \Omega_1, \quad \varphi \in E_1(\Omega_1).$$

Если:

- 1) множества $E(\Omega)$ и $E_1(\Omega_1)$ равноможны;
- 2) $(1 - M_\infty^2) = O(\varepsilon^n)$, $0 < n < 1$;
- 3) $\|\varphi\| = O(\varepsilon)$, $\varepsilon < 1$;
- 4) оператор P , осуществляющий отображение $\Omega \rightarrow \Omega_1$, дает связь элементов $g(x, y)$ и $g_1(x, y)$ области Ω и Ω_1 в виде:

$$g = \left\{ \left[\xi + B\varphi(\xi, \eta) \right], \frac{\eta}{\beta} \right\}, \quad g_1 = \{\xi, \eta\},$$

где

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad B = - \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1)}{3(1 - M_\infty^2)},$$

то имеется асимптотическая связь между элементами множества

$$\varphi \in E(\Omega) \text{ и } \varphi \in E_1(\Omega_1);$$

$$\varphi(x, y) = \varphi(\xi, \eta) + O(\varepsilon^{2+n}),$$

где $O(\varepsilon^{2+n})$ обладает свойством

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(\varepsilon^k)}{\varepsilon^k} \rightarrow N$$

и N — некоторая постоянная.

Следовательно, краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения в физическом пространстве может быть сформулирована в пространстве аппроксимации для уравнения Лапласа, и связь между пространствами имеет вид:

$$x = \xi - \frac{\varepsilon M_\infty^2 (\gamma_1 + 1)}{3(1 - M_\infty^2)} \varphi(\xi, \eta, s), \quad (12.2)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \eta, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} s.$$

Для малых возмущений $\varepsilon M_\infty^2 / (1 - M_\infty^2) \ll 1$ и преобразование (12.2) переходит в аффинное преобразование Прандтля — Глауэрта, а уравнение (12.1) — в линейное дифференциальное уравнение теории малых возмущений.

Теорема об асимптотической связи для нестационарных течений. Пусть элементы множества $E(\Omega) \in C^2(\Omega)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} & (1 - M_\infty^2) \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - 2M_\infty^2 \Phi_{xt} - M_\infty^2 \Phi_{tt} = \\ & = M_\infty^2 \left[\frac{1}{2} (\gamma - 1) (2\Phi_x + 2\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) (\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + \right. \\ & + (2\Phi_x + \Phi_x^2) \Phi_{xx} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} + 2\Phi_y \Phi_z \Phi_{yz} + \Phi_z^2 \Phi_{zz} + \\ & \left. + 2(1 + \Phi_x) (\Phi_y \Phi_{yx} + \Phi_z \Phi_{zx}) + 2(\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_y \Phi_{yt} + \Phi_z \Phi_{zt}) \right], \end{aligned} \quad (12.3)$$

$$g \in \Omega, \quad \Phi \in E(\Omega),$$

а элементы множества $E_1(\Omega_1) \in C^2(\Omega_1)$ удовлетворяют линейному уравнению

$$(1 - M_\infty^2) (\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} + \Phi_{ss}) - 2M_\infty^2 \Phi_{\xi t} - M_\infty^2 \Phi_{tt} = 0, \quad (12.4)$$

$$g \in \Omega_1, \quad \Phi \in E_1(\Omega_1).$$

Если:

1) множества $E(\Omega)$ и $E_1(\Omega_1)$ равноможны;

2) $(1 - M_\infty^2) = O(\varepsilon^n)$, $0 < n < 1$;

3) $\|\Phi\| = O(\varepsilon)$, $\varepsilon < 1$;

4) $k = O(\varepsilon^p)$, $0 < p \leq 1$;

5) оператор P , осуществляющий отображение $\Omega \rightarrow \Omega_1$, дает связь элементов $g(x, y, z, t)$ и $g_1(\xi, \eta, s, t)$ области Ω и Ω_1 в виде

$$P = \left\{ \begin{array}{l} q \left\{ \xi + B\Phi(\xi, \eta, s, kt); \frac{\eta}{\beta}; \frac{s}{\beta}; kt \right\}, \\ q_1 \{ \xi, \eta, s, \bar{t} \}, \end{array} \right.$$

где

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad B = -\frac{M_\infty^2 (\gamma + 1)}{3(1 - M_\infty^2)}, \quad \bar{t} = kt,$$

то имеется асимптотическая связь между элементами множества $\Phi \in E(\Omega)$ и $\Phi \in E_1(\Omega_1)$:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(\xi, \eta, s, \bar{t}) + O(\varepsilon^{2+n}),$$

где $O(\varepsilon^{2+n})$ обладает свойством

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(\varepsilon^m)}{\varepsilon^m} \rightarrow N$$

и N — некоторая постоянная.

Следовательно, краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения в физическом пространстве может быть сформулирована в пространстве аппроксимации для линейного уравнения, и связь координат между пространствами имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= \xi - \frac{\varepsilon M_\infty^2 (\gamma + 1)}{3(1 - M_\infty^2)} \Phi(\xi, \eta, s, \bar{t}), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \eta, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} s. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Для малых возмущений $\varepsilon M_\infty^2 \ll 1$ и преобразование (12.5) переходит в преобразование Прандтля — Глауэрта, а (12.3) — в линейное дифференциальное уравнение теории малых возмущений.

Рассмотрим кратко решение задачи о движении профиля в околосзвуковом потоке газа.

Преобразуя в соответствии с формулами связи граничные условия, получаем краевую задачу в плоскости аппроксимации:

$$\Delta \varphi + O(\varepsilon^{2+n}) = 0, \quad g \in \Omega_1; \quad (12.6)$$

$$\varphi_\eta = \frac{1}{\beta} [\varepsilon F_x(\xi, \varphi) + \varepsilon^2 (1 + B) F_x(\xi, \varphi) \varphi_\xi(\xi, \eta)], \quad g \in S_1;$$

$$\nabla \varphi \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow -\infty; \quad \|\varphi\|_{C^2} \sim O(\varepsilon).$$

Применяя формальную процедуру метода возмущений, можно построить асимптотическое решение задачи в виде ряда по параметру ε . В этом решении возникает последовательность краевых задач:

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad g \in \Omega_0, \quad \Omega_0 = R^2 \setminus S_p; \quad (12.7)$$

$$\varphi_{n\eta} = F_n(\xi), \quad \xi \in S_p; \quad \nabla \varphi_n \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad \|\varphi_n\|_{C^2} \sim O(1).$$

Решения краевых задач (12.7) строятся с помощью интегральных операторов $A\gamma$, $A\chi$ (см. § 5.3).

Используя формулы связи координат физической плоскости и плоскости аппроксимации, получаем формулы для коэффициентов давлений и их разности на верхней и нижней поверхностях профиля в физической плоскости:

$$C_{p\pm} = C_{pi\pm} / \left\{ \sqrt{1 - M_\infty^2} \left[1 + \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1)}{6(1 - M_\infty^2)} C_{pi\pm} \right] \right\} + O(\varepsilon^{2+n}),$$

$$\Delta C_p = \frac{C_{pi}^n}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left[1 - \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1)}{3(1 - M_\infty^2)} C_{pi}^c \right] + O(\varepsilon^{2+n}),$$

где C_{pi} — коэффициент давления, определенный из последовательности задач (12.7) и разделенный на симметричную C_{pi}^c и несимметричную C_{pi}^n части.

Подробное исследование этой задачи содержится в работах [68, 94]. Г. Ф. Сигалов развил формализм решения нестационарных задач и решил ряд конкретных проблем. В целом метод полной аппроксимации в задачах околосзвуковых течений обсуждается в обзоре [82].

§ 12.3. Метод полной аппроксимации в нелинейной теории несущей поверхности

Нелинейная задача о крыле малого удлинения в жидкости и газе — одна из трудных задач механики жидкости. Это связано прежде всего со сложностью явлений, происходящих в жидкости при движении крыла малого удлинения с большими углами атаки. Образование мощных вихревых жгутов на входящей и боковых кромках крыла дает большие углы скаса потока; образование вихревой области за крылом приводит к тому, что гидродинамические характеристики крыла оказываются нелинейными по углу атаки, причем нелинейность, увеличивая подъемную силу на крыло, существенна даже при малых углах атаки. Эти же явления сильно затрудняют математический анализ, поскольку некоторые основные положения линейной теории несущей поверхности здесь уже неприемлемы.

Математические трудности определили и то, что при большом прогрессе в линейных задачах известные результаты по нелинейной теории крыла малого удлинения получены на основе физических картин течения, базирующихся на экспериментальных фактах.

В работе автора [69] задача исследована методом полной аппроксимации. Нетрудно показать, что линейная задача о несущей поверхности, полученная из нелинейной задачи классическим методом возмущений, не дает равномерную аппроксима-

цию. Из предыдущего материала известно, что при движении несущей поверхности в жидкости за ней образуется полубесконечная область Σ , в которой потенциал скоростей и его производная терпят разрыв.

Если B_λ — уравнение границы этой области, то имеем

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial x} = O(\alpha_i), \quad x \rightarrow -\infty,$$

где α_i — некоторый осредненный угол скоса потока на бесконечности за крылом.

Во всех известных линейных теориях вихревая область считается поверхностью со свойством

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow -\infty,$$

но тогда для метрики $\rho(B_0, B_{0i})$ получаем

$$\rho(B_0; B_{0i}) = O(\alpha_i) |x|,$$

и второе условие равномерной аппроксимации не выполняется для больших x . Угол скоса потока крыла имеет асимптотические оценки:

$$\alpha_i = O(\alpha/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty;$$

$$\alpha_i = O(\alpha), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Поскольку по физическому смыслу рассматриваемой задачи ясно, что наибольшее влияние будут оказывать угол скоса потока на бесконечности за крылом и отклонение вихревой пелены от плоскости oxy , можно ограничиться задачей с деформацией лишь координаты z .

Условие равномерной аппроксимации будет удовлетворено, если взять связь координат в виде

$$z_1 = z + \int_0^{x_1} V_{z_1}(\tau_1, y_1, z_1) d\tau_1.$$

В первом приближении

$$z_1 = z + \int_0^{x_1} V_{0z_1}(\tau_1, y_1, z_1) d\tau_1.$$

Краевая задача для потенциала ускорений имеет вид:

$$\Delta\theta = 0, \quad g \in \Omega \setminus S_{10};$$

$$-\frac{1}{V_0} \int_{+\infty}^{x_1} \theta_n d\tau_1 = F(g), \quad g_1 \in S_{10};$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow +\infty; \quad \theta_+ - \theta_- = 0, \quad g_1 \in L.$$

Решение этой задачи можно представить так:

$$\theta = \int_{S_{10}} \gamma(p) K(p, g) ds,$$

где $K(p, g)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, соответствующее диполю.

Поверхность S_{10} есть несущая поверхность в новом пространстве и искривленная в соответствии с принятым преобразованием.

В известных линейных теориях вместо несущей поверхности берут проекцию несущей поверхности на плоскость xoy ; это приводит к тому, что вихревая область вырождается в поверхность, которая также лежит в плоскости xoy . Такое приближение нас не удовлетворяет, поскольку нелинейные эффекты на крыле связаны именно с тем, что несущая поверхность и область Σ не лежат в одной плоскости.

Развивая решение далее, в работе [69] получено нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi_{1z_1} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{10}} \frac{\gamma(p)}{\lambda(\bar{\eta})} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \frac{(\bar{y} - \bar{\eta})}{(\bar{y} - \bar{\eta})^2 + (F(\xi)/\lambda(\bar{\eta}))^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{1}{(x - \xi)} \frac{[\lambda^2(\eta)(\bar{y} - \eta)^2 + (x - \xi)^2]}{\sqrt{\lambda^2(\bar{\eta})(\bar{y} - \bar{\eta})^2 + (x - \bar{\xi})^2 + \bar{F}^2(\bar{\xi})}} \right] \right\} dg.$$

Это уравнение и решает задачу о движении несущей поверхности произвольной формы при углах атаки α . Форма крыла в плане задается функцией $\lambda(\eta)$.

В связи с тем, что нелинейные эффекты наиболее существенно проявляются на крыльях малого удлинения, более подробно была изучена задача о крыле малого удлинения. При $\lambda \rightarrow 0$ уравнение имеет корректный предел:

$$\varphi_{1z_1} = - \frac{1}{2\pi\lambda(\bar{x})} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_{\eta}(\bar{x})(\bar{y} - \bar{\eta})}{(\bar{y} - \bar{\eta}) + (F(\bar{x})/\lambda(\bar{x}))^2} d\bar{\eta},$$

$$\Phi_{\eta}(\bar{x}) = \int_{-1}^{+1} \gamma_{\eta}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi}.$$

Рассмотрим решение для функции

$$F(\bar{\xi}) = (\bar{\xi} - 1) \beta(\bar{\eta}),$$

где $\beta(\bar{\eta})$ — угол между сбегающим вихрем и сечением крыла в плоскости (x_1oy_1) . Эта функция соответствует физической схеме крыла с тонкой набегающей пеленой, начинающейся с входящей кромки. Соответствующим заданием функции $F(\bar{\xi})$ можно получить схемы с различной структурой вихревой области Σ .

Выполняя условие на задней кромке, имеем для функции Φ_n уравнение

$$\frac{1}{2\pi\lambda(\bar{x})} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_n(\bar{y}-\bar{\eta})}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2 + (2\beta_n(\bar{\eta})/\lambda(\bar{x}))^2} d\bar{\eta} = \sin \alpha. \quad (12.8)$$

Принятая функция $F(\bar{\xi})$ и последнее уравнение охватывают большую группу физических нелинейных теорий, в связи с чем отметим один важный факт, связанный с выбором угла β . Легко показать, что для угла β справедлива асимптотическая оценка

$$\beta = O(\lambda^\kappa), \quad \kappa > 0.$$

Эта оценка получается из интегрального уравнения при условии, что норма Φ ограничена при $\lambda \rightarrow 0$.

Если $\|\Phi\|_{\lambda=0} = M$ (M — некоторое число), то $\kappa = 0,5$. Во всех известных теориях угол β полагают конечным. В некоторых работах его принимают равным половине угла скоса потока, в других предлагаются различные приемы для его вычисления.

Существенно, что при конечных значениях угла β при $\lambda \rightarrow 0$ результаты теории должны дать бесконечные значения подъемной силы на крыле, что не согласуется с наблюдаемыми в экспериментах результатами.

Уравнение (12.8) позволяет получить обстоятельную информацию о крыльях малого удлинения произвольной формы. Важным является определение функции $F(\bar{\xi})$. Поскольку физические явления при движении крыла малого удлинения, по-видимому, невозможно полно описать в рамках теории идеальной жидкости, функция $F(\bar{\xi})$ дает возможность более точно учесть влияние вязкости, если при ее определении ввести дополнительные гипотезы о структуре течения.

Для получения первых конечных результатов по коэффициенту подъемной силы получено решение уравнения (12.8) для прямоугольного крыла в вариационном приближении, в котором принято эллиптическое распределение циркуляции $\beta = \alpha\sqrt{\lambda/2\sqrt{2}}$.

Коэффициент подъемной силы

$$C_y = \frac{\pi\lambda}{2\Psi_\beta} \alpha, \quad \Psi_\beta = 2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2\beta}{\lambda} k\right) \frac{J_1^2(k)}{k} dk,$$

где α — угол атаки крыла, $J_1(k)$ — функция Бесселя,

$$\Psi_\beta = 0,5\tau_\beta^2 + 0,25\tau_\beta^4 - 0,0625\tau_\beta^6 - 0,0469\tau_\beta^8 + 0,0237\tau_\beta^{10} + 0,0188\tau_\beta^{12} + 0,0981\tau_\beta^{14},$$

$$\tau_\beta = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\lambda}\right)^2 + 1} - \frac{\beta}{2\lambda}.$$

В цитируемой работе была исследована также задача о крыле произвольного удлинения. В частности, получено уравнение типа Прандтля

$$\Gamma(\bar{y}) \frac{a_\infty}{2\lambda \bar{c}_2(\lambda)} \left[\alpha(\bar{y}) - \frac{c_3(\lambda)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(\bar{\eta}) (\bar{y} - \bar{\eta})}{(\bar{y} - \bar{\eta})^2 + (F/\lambda(\bar{\eta}))^2} d\bar{\eta} \right]. \quad (12.9)$$

Здесь

$$c_3(\lambda) = 1 + c_1(\lambda),$$

$$F = F(-1), \quad \Gamma(\bar{\eta}) = 2 \int_{-1}^1 \gamma(g_1) d\bar{\xi},$$

$$c_1(\lambda) = 1 - \sqrt{\lambda} / \sqrt{\lambda^2 + 4}, \quad c_2(1/\lambda) = c_1(\lambda).$$

При $F=0$ и $c_2(\lambda) = c_3(\lambda) = 1$ это уравнение переходит в известное уравнение Прандтля для крыла большого относительного размаха.

Уравнение (12.9) позволяет исследовать широкий класс задач, поставленных для уравнения Прандтля в линейной теории.

Таким путем были выведены формулы для коэффициентов подъемной силы и индуктивного сопротивления крыла с эллиптическим распределением циркуляции:

$$C_y = a_\infty / \left\{ c_2(\lambda) \left[1 + \frac{a_\infty c_3(\lambda)}{c_2(\lambda) \pi \lambda} \Psi_\beta \right] \right\} \alpha_\beta, \quad (12.10)$$

$$C_{xi} = \frac{C_y^2}{\pi \lambda} \Psi_\beta.$$

Как следует из (2.10), индуктивное сопротивление крыла, полученное по нелинейной теории, оказалось меньшим, чем по линейной теории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Идея функциональных преобразований — одна из основных идей теории асимптотических методов

В настоящей монографии ставилась задача развить основные положения теории асимптотических методов. Эта теория базируется на концепциях предельной корректности, и мы дополнительно подчеркиваем алгоритмическую сторону проблемы. В отличие от теории корректности, которая в основной своей части не касается математических методов, пригодных для решения тех или иных задач математической физики, теория предельной корректности неразрывно связана с асимптотическими методами и обязана им своим происхождением. Неудачно выбранный асимптотический метод приводит к явлениям некорректности и, наоборот, для кажущейся, на первый взгляд, некорректной проблемы можно разработать вариант асимптотического метода, с помощью которого задача оказывается разрешимой в регулярном классе корректности. Поэтому следует говорить о регуляризирующих свойствах асимптотических методов.

Как следует из этой работы, регуляризирующие свойства (а следовательно, и общность) того или иного метода оказываются различными. Наиболее слабо они проявляются в методе малого параметра Пуанкаре. Усложнение рассматриваемых задач и стремление обойти трудности, вызываемые сингулярными ситуациями, привели к развитию более эффективных асимптотических методов, анализ которых, выполненный нами, дает возможность сделать некоторые общие выводы. Основной из них следующий: все существующие и имеющие достаточно широкую область применения асимптотические методы в той или иной мере используют идею преобразований, которые разделяются на три варианта: а) преобразование параметрического интервала; б) деформация независимых переменных; в) преобразование зависимой переменной (переход на второй уровень корректности).

Идеи преобразования были заложены еще в работах Пуанкаре и Ляпунова, и в настоящее время можно утверждать, что это одна из рациональных идей асимптотического анализа. Обсудим более подробно реализации этой идеи в конкретных методах.

Идея преобразования параметрического интервала привела в итоге к развитию метода функциональных параметров, при-

годного для изучения систем с произвольными параметрами. Сфера применимости этого метода огромна. Его успех определяется тем, что в классе задач с выходной информацией (информацией, нужной для приложения) о поведении системы на всем интервале или в окрестности некорректного предела это по существу единственный метод регулярного класса корректности. Напомним, что метод функциональных параметров в регулярном классе корректности реализуем для задач, в которых могут существовать асимптотические разложения с групповой шкалой.

Идея деформации независимых переменных в основном воплощена в методе Пуанкаре — Лайтхилла — Го (деформированных координат). Специфическая особенность его состоит в том, что он разработан главным образом для класса задач с деформацией пространственных независимых переменных. Этот метод обладает очень сильными регуляризирующими свойствами и успешно конкурирует с сингулярными (особыми) асимптотическими методами (например, с методом сращиваемых асимптотических разложений). Естественно, существует тесная связь метода Пуанкаре — Лайтхилла — Го с методом функциональных параметров, прослеживающаяся при деформации временной независимой переменной. Заметим, что в задачах нелинейной механики идея преобразования независимой переменной с целью улучшения ситуации была реализована Ляпуновым. Если рассматривать временной интервал в качестве параметрического и преобразовать этот интервал в отрезок $I_1 \equiv [0 \div 1]$, то мы приходим к одному из вариантов метода функциональных параметров — методу пространства малого времени. Здесь также происходит деформация независимой переменной. Именно в этом и состоит связь этих методов.

Однако имеется и существенное различие, а именно: в методе ПЛГ шкала конструируется по физическому параметру, тогда как в методе функциональных параметров время рассматривается не как независимая переменная, а как параметр, генерирующий шкалу малого времени.

Идеи преобразования зависимой переменной в основном реализованы в методах усреднения и ВКБ. Отметим одну деталь, связанную с методом ВКБ. При переходе на второй уровень корректности в методе ВКБ происходит регуляризация некорректного предела, и эта ситуация имеет место для однородных решений определенного класса дифференциальных уравнений. При рассмотрении неоднородных дифференциальных уравнений этого класса общее решение будет содержать однородную и неоднородную части. В конкретных исследованиях выясняется интересный факт: однородные и неоднородные части имеют различные корректные пределы. Следовательно, необходимо изучать такую систему на основе двух асимптотических методов и строить два асимптотических решения соответственно для однородной и неоднородной частей.

2. Еще раз о шкале сравнения

Шкала сравнения имеет фундаментальное значение в асимптотическом анализе. По существу большая доля успеха исследования зависит от правильного выбора шкалы сравнения. Напомним, что разные математические модели имеют различную чувствительность к шкале сравнения. Существует класс задач, в котором допускается большая свобода выбора шкалы сравнения. Имеются также задачи, для которых можно применить конечное небольшое число шкал, и задачи, для которых существует единственная шкала. Такое положение наиболее характерно для терминального класса корректности.

Очень часто оказывается затруднительным выбор априори шкалы сравнения. Тогда следует отказаться от этой цели и предоставить возможность алгоритму решения самому сформулировать шкалу в процессе конкретных вычислений. Попытки задания определенных шкал априори в подобных ситуациях часто приводят к неверным результатам. В этом аспекте следует отрицательно высказаться о суждении: если существует формальный алгоритм асимптотического решения задачи, то этот алгоритм приводит к действительному решению в области некоторых значений параметра. Это не так. Выбор шкалы сравнения из более частного класса приводит к тому, что формализм метода выделяет решение из множества, не пересекающегося с множеством решений задачи (см. § 7.4—7.7). Но в ряде задач это оказывается справедливым; ошибка выбора шкалы сравнения обнаруживается при развитии формализма решения.

Обсудим еще раз вопрос о классификации шкал сравнения. По признаку формирования шкалы сравнения можно разделить на две группы: априори задаваемые и формируемые. В зависимости от структуры в главе I выделено два класса шкал: групповая и квазигрупповая. Существуют шкалы, не принадлежащие этим двум группам, которые назовем нерегулярными.

В регулярном классе корректности асимптотические разложения существуют со шкалами первой и второй групп. Разложения по нерегулярным шкалам могут встречаться в терминальном классе корректности, а также в решениях, получаемых на основе сингулярных методов. Классификация шкал по структуре непосредственно не связана с видом математической модели, однако для терминального класса корректности необходима классификация, опирающаяся на структуру математической модели. В частности, для параболических моделей математической физики эта классификация выглядит следующим образом: спектральные, регулярные и смешанные шкалы.

3. Уровни предельной корректности

Обратим внимание на важность рассмотрения уровней корректности. Часто построение асимптотических решений на первом уровне корректности оказывается очень сложным или невозможным, и в этом случае целесообразен переход ко второму уровню корректности. Таким образом, идея этого перехода является также одной из основных в асимптотическом анализе. Этот переход можно осуществлять двумя путями: 1) имеющимися математическими методами, не связанными с асимптотическим анализом; 2) асимптотическим методом, использующим в своей основе идею перехода. В первом случае асимптотический анализ в полном объеме применяется к изучению системы второго уровня, при этом имеется определенная свобода выбора асимптотического метода. Во втором случае исследование выполняется в рамках единого метода, причем априори имеется достаточно подробная информация о структуре регуляризирующего конструктора.

4. Классификация асимптотических методов и алгоритмов

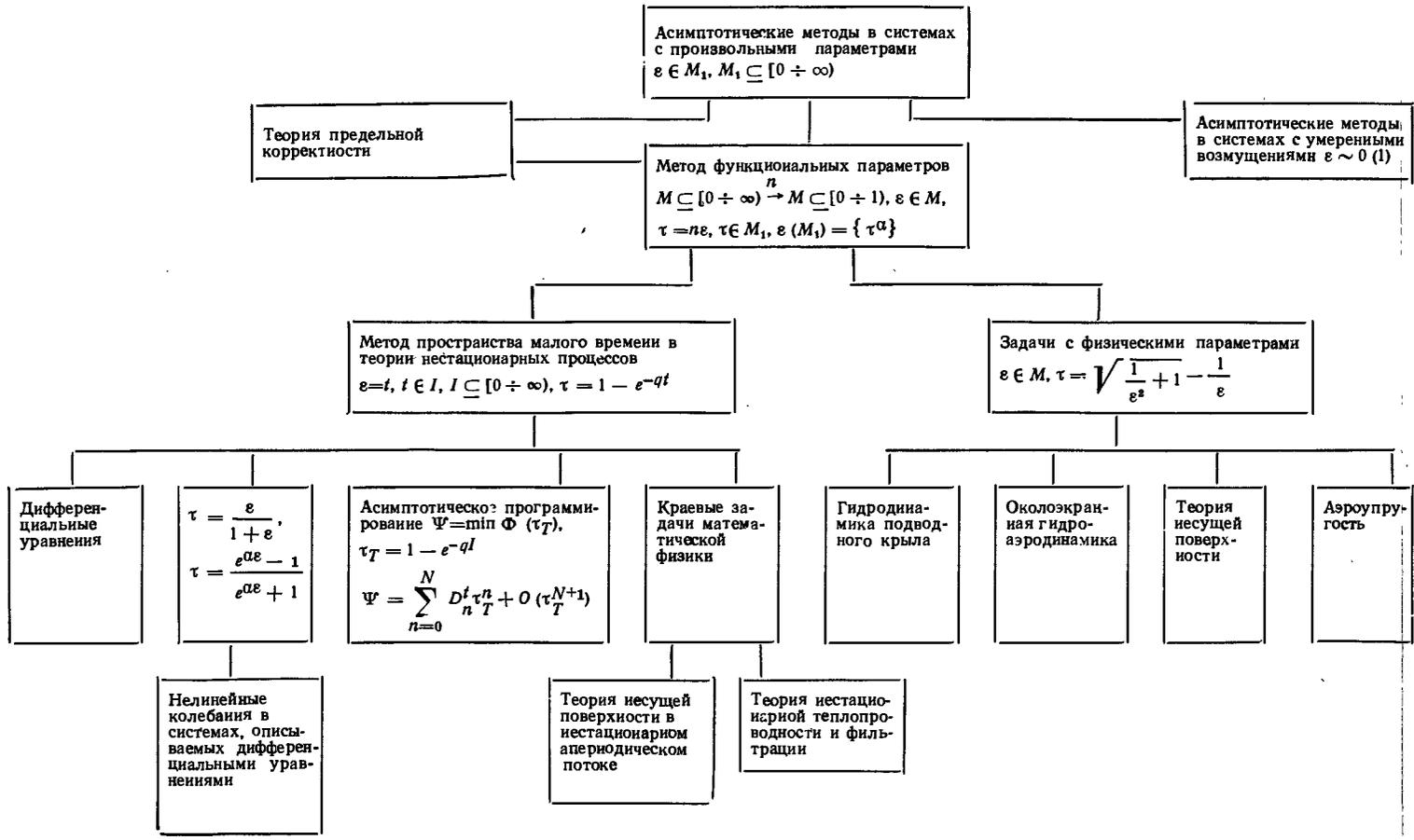
Самая общая классификация асимптотических методов берет свое начало от понятия предельной корректности. Приняв это за основу, все асимптотические методы решения задач можно разбить на две группы: 1) обладающие предельной корректностью; 2) необладающие предельной корректностью.

Предполагаемые названия групп методов не совсем удачны в том смысле, что одна и та же задача может быть корректной относительно того или иного конца параметрического интервала. Но они достаточно четко определяют смысл методов, тогда как более строгие формулировки оказывались бы и более длинными. Как второй вариант можно было бы предложить такие формулировки: 1) регулярные асимптотические методы; 2) сингулярные асимптотические методы.

В зависимости от принадлежности к классам корректности регулярные асимптотические методы можно разделить на методы класса K_1 и методы класса K_2 . В свою очередь алгоритмы асимптотических методов можно подразделить на следующие группы: позиционные, алгоритмы аппроксимации, смешанные, конические.

Характерной особенностью позиционных алгоритмов является то, что в решении $n+1$ -приближения полностью используется информация n -приближения и дополнительно вычисляется один член асимптотического разложения. Как правило, эти алгоритмы основаны на рекуррентных соотношениях.

В алгоритмах аппроксимации при определении решения в приближении происходит пересчет заново всех членов асимптотического разложения. Исключение из этого правила составля-



Виды функциональных параметров

- $\tau = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ — Л. Эйлер, Р. Беллман (нелинейные колебания)
- $\tau = \frac{e^{\alpha\varepsilon} - 1}{e^{\alpha\varepsilon} + 1}$ — А. Пуанкаре (задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений)
- $\tau = 1 - e^{-qt}$ — А. Н. Панченков, А. Н. Филатов (нестационарные процессы)
- $\tau = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} - \frac{1}{\varepsilon}$ — А. Н. Панченков (задачи математической физики)
- $\tau = \frac{\sqrt{1+\varepsilon} - 1}{\sqrt{1+\varepsilon} + 1}$ — Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Я. Ф. Каюк (задачи математической физики, нелинейные колебания)
- $\tau = \frac{e^{qt} - e^{-qt} - 2}{e^{qt} - e^{-qt} + 2}$ — В. И. Зубов (задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений)

ют решения, принадлежащие полным ортонормированным пространствам. Соответствующие алгоритмы решения, записанные в виде разложения по базису этого пространства, могут иметь и позиционную структуру (например, метод Фурье для параболических уравнений).

Смешанные алгоритмы содержат элементы алгоритмов первой и второй групп.

Конические алгоритмы характерны для терминального класса корректности. В этих алгоритмах на первом этапе по одному стабилизированному решению восстанавливается совокупность решений (конус операторов D). На втором этапе единственный элемент из совокупности решений выделяется на основе задач аппроксимации.

Классификация наиболее известных методов приведена на диаграмме 1.

5. Метод функциональных параметров и теория предельной корректности

Особую роль в теории предельной корректности играет метод функциональных параметров. Это определяется тем, что он оказывается пригодным для изучения эволюции системы на всем параметрическом интервале, что существенно при общем анализе математических моделей и развитии ряда конструкций теории предельной корректности.

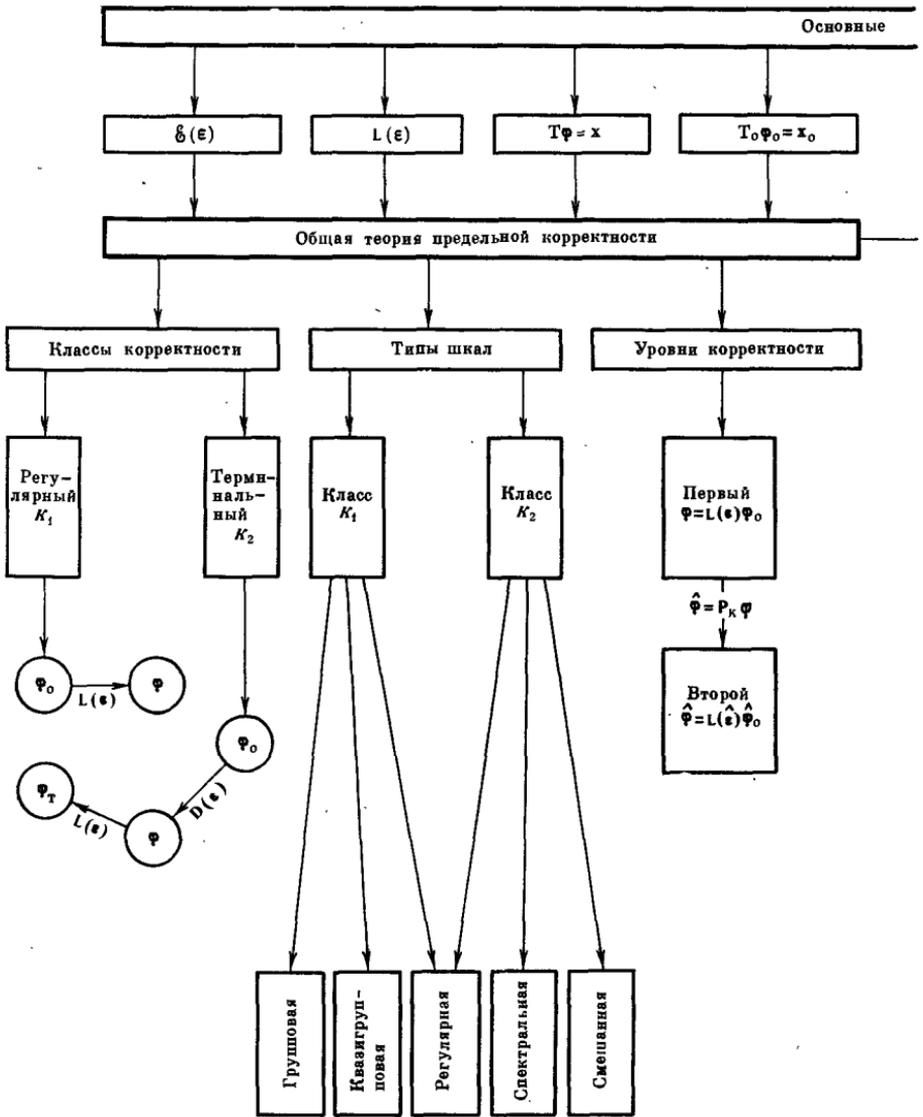
В настоящей монографии основное внимание уделялось именно этому методу, поскольку автор в течение десяти лет занимался его развитием и приложением к многочисленным задачам механики.

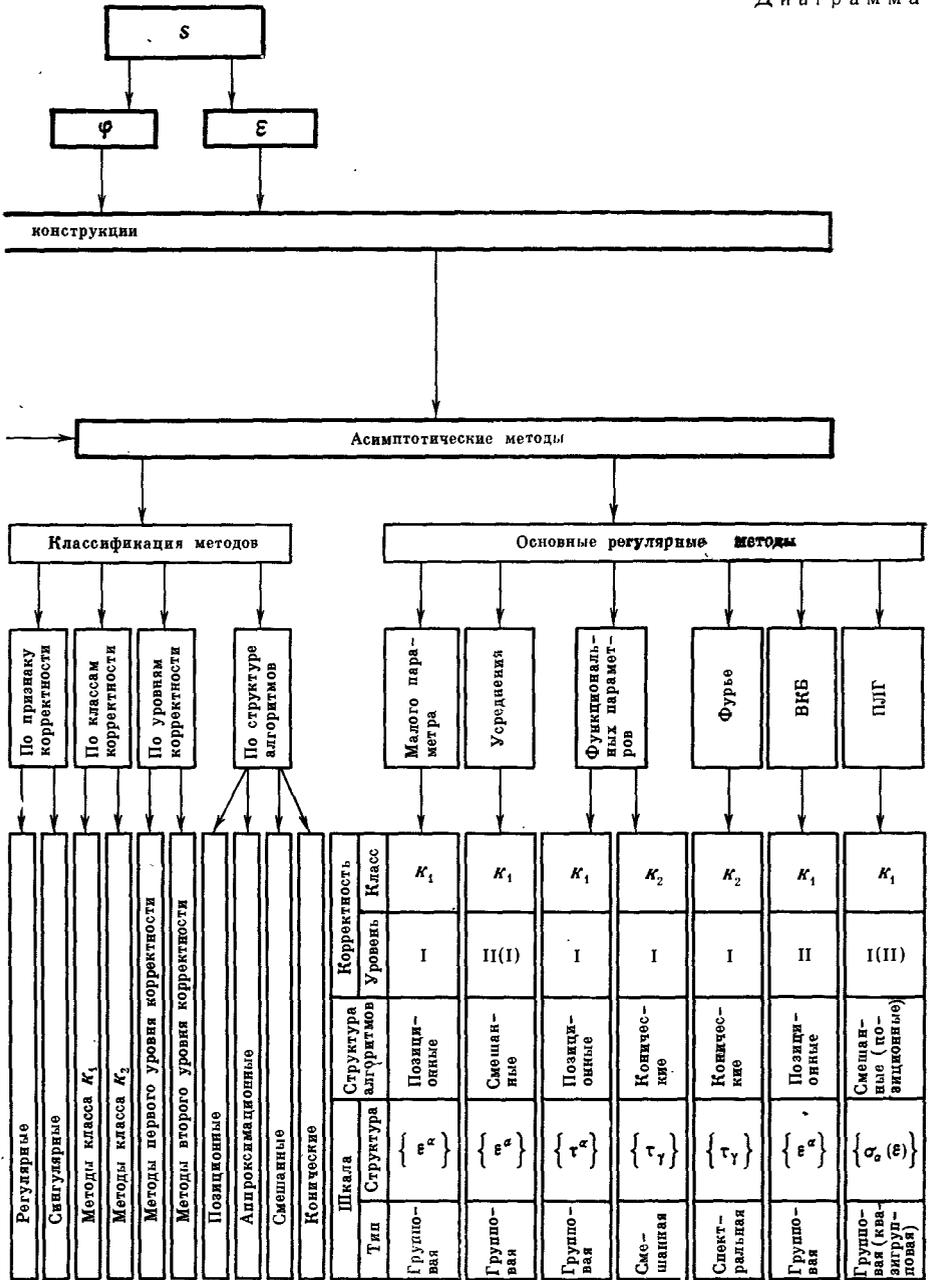
Основные результаты по теории предельной корректности, приведенные в этой работе, получены в связи с разработкой данного метода. Решения многочисленных конкретных проблем (см. [62, 63] и § 7.11, 7.12) привели к выводу о его вычислительной эффективности.

Отметим, что существует целый ряд функциональных параметров, пригодных для решения определенного класса задач. Некоторую наглядную иллюстрацию места метода функциональных параметров в исследованиях по асимптотическим методам в системах с произвольными параметрами дает диаграмма 1, взятая из обзора [78]. На диаграмме 2 показана общая структура теории предельной корректности.

Отметим, что в настоящее время теория предельной корректности имеет развитую прикладную часть. И одной из задач будущего следует считать задачу более глубокого развития самой теории.

О том, в какой степени концепции предельной корректности рациональны для теории асимптотических методов, должен судить читатель.





ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов Ю. А.* Колеблущееся крыло в плоскопараллельном потоке сжимаемой жидкости.— В кн.: Гидродинамика больших скоростей, вып. 5. Киев, «Наукова думка», 1968.
2. *Абрамов Ю. А.* Задача об апериодическом движении симметричного плоского контура в дозвуковом потоке газа в пространстве малого времени.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
3. *Абрамов Ю. А.* Задача о нестационарных апериодических движениях несущей поверхности в дозвуковом потоке газа в пространстве малого времени.— Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам в механике жидкости и газа. Изд. Казан. ун-та, 1971.
4. *Абрамов Ю. А.* Нестационарные апериодические движения симметричного плоского контура в дозвуковом потоке газа.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1970.
5. *Абрамов Ю. А.* Нестационарные апериодические движения несущей поверхности в дозвуковом потоке газа.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1971.
6. *Ахизер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
7. *Барбашин Е. А.* Об оценке среднеквадратичного отклонения от заданной траектории.— Автоматика и телемеханика, 1960, № 7.
8. *Барбашин Е. А.* О приближенном осуществлении движения по заданной траектории.— Автоматика и телемеханика, 1961, № 6.
9. *Барбашин Е. А.* Программное регулирование и теория оптимальных процессов.— Оптимальные системы. Статистические методы. Труды II конгресса ИФАК, М., «Наука», 1965.
10. *Белоусов Б. Н., Лукашенко А. Н., Панченков А. Н.* Теория нестационарного движения несущей поверхности в ограниченной жидкости.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
11. *Белоусов Б. Н., Лукашенко А. Н., Панченков А. Н.* Несущая поверхность в нестационарном потоке вблизи экрана.— В кн.: Самолетостроение и техника воздушного флота, вып. 20. Изд. Харьк. ун-та, 1970.
12. *Белоусов Б. Н., Панченков А. Н.* Теория несущей поверхности в нестационарном потоке, основанная на одномерных интегродифференциальных уравнениях.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1971.
13. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., «Мир», 1966.
14. *Беллман Р.* Метод возмущений в приложении к нелинейной механике.— Сб. переводов «Механика», 1957, 2(42).
15. *Бергман С.* Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М., «Мир», 1964.
16. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.
17. *Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л.* Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.
18. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод

- ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1969.
19. *Борисюк М. Н.* Задача Коши и начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в пространстве малого времени.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1970.
 20. *Борисюк М. Н.* Асимптотическое решение нелинейной задачи теплопроводности и фильтрации.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
 21. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
 22. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
 23. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
 24. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
 25. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Новые качественные методы в небесной механике. М., «Наука», 1971.
 26. *Де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 1961.
 27. *Диогенов А. В.* Плоская задача об аperiodическом движении суперкавитирующего крыла в идеальной безграничной жидкости.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
 28. *Елшин В. Ю.* Метод пространства малого времени в задачах неустановившегося течения вязкой жидкости к критической точке вращающегося диска.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
 29. *Зеленяк Т. И., Михайлов В. П.* Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \rightarrow \infty$.— В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. М., «Наука», 1970.
 30. *Зубов В. И.* Вопросы теории второго метода Ляпунова, построение общего решения в области асимптотической устойчивости.— ПММ, 1955, 19, вып. 2.
 31. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
 32. *Каюк Я. Ф.* Об аналитическом продолжении решений нелинейных дифференциальных уравнений по параметру.— Укр. мат. ж., 1967, № 5.
 33. *Келдыш М. В., Седов Л. И.* Приложения теории функций комплексного переменного в гидродинамике и аэродинамике. М., «Наука», 1964.
 34. *Космодемьянский А. А.* Определение подъемной силы профиля крыла при мгновенном изменении угла атаки.— Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1965, № 5.
 35. *Костин А. Г.* Исследование нестационарного аperiodического движения тонкого профиля.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
 36. *Костин А. Г.* Гидроаэродинамические характеристики тонкого профиля при нестационарных аperiodических движениях.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1970.
 37. *Костин А. Г., Осокина С. В.* Исследование нестационарного аperiodического движения несущей поверхности большого удлинения вблизи экрана.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
 38. *Костин А. Г., Панченков А. Н.* Асимптотический метод исследования нестационарного аperiodического движения несущей поверхности в жидкости.— Труды Научн.-техн. о-ва судостроит. пром., вып. 124. Л., изд-во «Судостроение», 1969.
 39. *Кублановская В. Н.* Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1959, 53.
 40. *Лантев Ю. И.* Краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве малого времени.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.

41. Латес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., «Мир», 1970.
42. Мартынюк А. А. Про побудову розв'язків динамічних систем в області асимптотичної стійкості.— Докл. АН УССР, серия А, 1969, № 11.
43. Мартынюк А. А. О построении решений систем дифференциальных уравнений в области асимптотической устойчивости.— Укр. мат. ж., 1970, 22, № 3.
44. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. Изд-во Моск. ун-та, 1965.
45. Мерриэм К. У. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. М., «Мир», 1967.
46. Мильштейн Г. Н. О приближенном осуществлении процессов при помощи переходных кривых.— Прикл. мат. и мех., 1962, № 4.
47. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
48. Митропольский Ю. А., Мосеенков В. И. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных. Киев, Изд. Ин-та мат.-АН УССР, 1968.
49. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. М., Гостехиздат, 1949.
50. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
51. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1972.
52. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
53. Морен К. Методы гильбертова пространства. М., «Мир», 1967.
54. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
55. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1947.
56. Неццет В. И. Применение метода пространства малого времени к решению задач синтеза линейных оптимальных систем управления с учетом скорости регулирования.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
57. Неццет В. И. Синтез линейной оптимальной системы управления с ограничением скорости исполнительного механизма в пространстве малого времени.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1971.
58. Неццет В. И. Решение нелинейных операторных уравнений в пространстве малого времени.— В кн.: Прикладная математика, вып. 3. Изд. Иркут. ун-та, 1971.
59. Неццет В. И. Синтез оптимального управления нелинейными системами на основе асимптотического принципа оптимальности.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
60. Неццет В. И., Романова Н. Н. Нелинейная задача Коши в пространстве малого времени.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1970.
61. Неццет В. И., Соболева Л. Н. Асимптотический метод выбора оптимального управления в задаче жесткого слежения по траектории.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
62. Панченков А. Н. Гидродинамика подводного крыла. Киев, «Наукова думка», 1965.
63. Панченков А. Н. Теория потенциала ускорений. Новосибирск, «Наука», 1975.
64. Панченков А. Н., Ивченко В. М. и др. Задачи и методы гидродинамики подводных крыльев и винтов. Киев, «Наукова думка», 1966.
65. Панченков А. Н. Неклассические задачи теории возмущения.— Тезисы докладов Всемирного конгресса математиков, секция 12. М., 1966.
66. Панченков А. Н. Теория несущей поверхности в нестационарном ограниченном потоке.— Науч.-техн. о-во судостроит. пром. Л., изд-во «Судостроение», 1967.
67. Панченков А. Н. Некоторые задачи и методы гидродинамики больших скоростей.— В кн.: Современные вопросы гидродинамики. Киев, «Наукова думка», 1967.
68. Панченков А. Н. Несущая поверх-

- ность в околосзвуковом потоке газа.— В кн.: Гидродинамика больших скоростей, вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1967.
69. *Панченков А. Н.* Нелинейная теория несущей поверхности произвольного удлинения.— В кн.: Гидродинамика больших скоростей, вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1967.
 70. *Панченков А. Н.* Несущая поверхность в нестационарном потоке ограниченной жидкости. I.— В кн.: Гидродинамика больших скоростей, вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1968.
 71. *Панченков А. Н.* Несущая поверхность в нестационарном потоке ограниченной жидкости. II.— В кн.: Гидродинамика больших скоростей, вып. 5. Киев, «Наукова думка», 1968.
 72. *Панченков А. Н.* Асимптотические методы решения задач, корректных в предельном смысле.— Труды республиканской конференции по проблемам аэрогидродинамики и теплообмена. Изд. Киев. ун-та, 1969.
 73. *Панченков А. Н.* Асимптотические методы решения задач математической физики.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
 74. *Панченков А. Н.* Асимптотический принцип оптимальности в теории оптимального управления.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
 75. *Панченков А. Н.* Задача о нестационарном аperiodическом движении несущей поверхности в несжимаемой жидкости.— В кн.: Самолетостроение и техника воздушного флота, вып. 20. Изд. Харьк. ун-та, 1970.
 76. *Панченков А. Н.* Асимптотические методы в теории систем.— В кн.: Методы управления большими системами. [Материалы Байкальской школы по теории и методам управления большими системами]. Изд. Иркут. ун-та, 1970.
 77. *Панченков А. Н.* Задача Коши в пространстве малого времени.— Труды Иркут. политехн. ин-та, вып. 52. Иркутск, 1970.
 78. *Панченков А. Н.* Асимптотические методы в системах с произвольными параметрами.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1970.
 79. *Панченков А. Н.* Метод пространства малого времени в теории нестационарных процессов.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1971.
 80. *Панченков А. Н.* Классы предельной корректности в задачах математической физики.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
 81. *Панченков А. Н., Орлов Ю. Ф.* Исследование предельной корректности задач теории корабельных волн.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 3. Изд. Иркут. ун-та, 1973.
 82. *Панченков А. Н., Сигалов Г. Ф.* Метод полной аппроксимации в задачах околосзвуковой газовой динамики.— В кн.: Прикладная математика, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1971.
 83. *Панченков А. Н., Юхименко А. Н.* Крыло произвольного удлинения вблизи экрана.— В кн.: Гидродинамика несущих поверхностей. Киев, «Наукова думка», 1966.
 84. *Панченков А. Н., Яковлева Т. Н.* Метод разделения решений в теории аperiodических движений несущей поверхности.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 3. Изд. Иркут. ун-та, 1973.
 85. *Панченкова З. Г.* Неустановившийся поток прунтовых вод к стволу, расположенному над водоупором.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1971.
 86. *Первозванский А. А.* Критерий равномерного приближения в задачах оптимального управления.— Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому регулированию. М., «Наука», 1967.
 87. *Персидский К. П.* К устойчивости движения.— Мат. сборник, 1935, 42, вып. 1.
 88. *Поляхов Н. Н.* Теория нестационарного движения несущей поверхности. Изд. ЛГУ, 1960.
 89. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М., Гостехиздат, 1947.

90. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
91. *Сигалов Г. Ф.* Об одном методе решения краевой задачи газовой динамики в околзвуковой области.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
92. *Сигалов Г. Ф.* Движение телесного профиля в сжимаемой жидкости вблизи экрана.— Труды Научн.-техн. о-ва судостроит. пром., вып. 124. Л., изд-во «Судостроение», 1969.
93. *Сигалов Г. Ф.* Обтекание симметричного профиля околзвуковым потоком газа.— В кн.: Самолетостроение и техника воздушного флота, вып. 20. Изд. Харьк. ун-та, 1970.
94. *Сигалов Г. Ф.* Асимптотическое решение задачи обтекания телесного профиля околзвуковым потоком газа.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1971.
95. *Тихонов А. Н.* О некорректно поставленных задачах.— В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 8. Изд. Моск. ун-та, 1967.
96. *Тихонов А. Н., Иванов В. К., Лаврентьев М. М.* Некорректно поставленные задачи.— В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. М., «Наука», 1970.
97. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.
98. *Федяевский К. К.* Приближенная нелинейная теория прямоугольного крыла малого удлинения, движущегося вблизи жидкого экрана при больших числах Фруда.— В кн.: Гидродинамика несущих поверхностей. Киев, «Наукова думка», 1966.
99. *Фомель Б. М.* Методы теории нелинейных колебаний. Изд. Новосибир. ун-та, 1970.
100. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.
101. *Фын Л. У.* Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959.
102. *Харченко А. Г.* Влияние формы профиля на подъемную силу крыла вблизи экрана.— В кн.: Гидродинамика больших скоростей, вып. 5. Киев, «Наукова думка», 1968.
103. *Харченко А. Г.* Алгоритм решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений.— Труды Иркут. политехн. ин-та, вып. 52. Иркутск, 1969.
104. *Харченко А. Г.* Решение задач синтеза линейных оптимальных систем управления.— В кн.: Прикладная математика, вып. 1. Изд. Иркут. ун-та, 1969.
105. *Харченко А. Г.* Синтез оптимальной системы стабилизации на основе асимптотического принципа оптимальности.— В кн.: Методы управления большими системами, т. 2. Иркутск, 1970.
106. *Харченко А. Г.* Алгоритм синтеза линейной оптимальной системы управления.— В кн.: Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. М., «Наука», 1971.
107. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., «Мир», 1965.
108. *Цзянь Сюе-сень.* Метод Пуанкаре—Лайтхилла—Го.— В кн.: Проблемы механики, вып. 2. М., ИЛ, 1959.
109. *Черепенников В. Б.* Асимптотический метод решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.
110. *Черепенников В. Б.* Выбор оптимального параметра отображения в асимптотическом методе пространства малого времени.— В кн.: Асимптотические методы в теории систем, вып. 2. Изд. Иркут. ун-та, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	6
ВВЕДЕНИЕ	9
1. Интересные примеры	9
2. Содержательная логика монографии. Общие замечания	15
Раздел I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ	
Глава 1. Общие сведения по теории предельной корректности	19
§ 1.1. Определение системы и ее математическая модель	19
§ 1.2. Задача эволюции системы. Шкала сравнения. Асимптотические разложения	20
§ 1.3. Понятие о корректности в предельном смысле	22
§ 1.4. Связь предельной корректности с корректностью постановки задач математической физики	24
Глава 2. Элементы общей теории предельной корректности	25
§ 2.1. Классы предельной корректности	25
§ 2.2. Классификация асимптотических методов	27
§ 2.3. Уровни предельной корректности	28
Глава 3. Анализ предельной корректности	31
§ 3.1. Постулат корректности	31
§ 3.2. Структурная некорректность	33
§ 3.3. Локальная некорректность	36
§ 3.4. Некорректность в ограниченной области $\Omega_2 \subset \Omega$	33
Раздел II. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ И МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ	
Глава 4. Регулярный класс предельной корректности. Метод функциональных параметров	39
§ 4.1. Общие свойства регулярного класса предельной корректности	39
§ 4.2. Идея метода функциональных параметров	40
§ 4.3. Краткие исторические сведения	43
§ 4.4. Функциональный параметр в гидродинамике подводного крыла	43

§ 4.5. Регулярные асимптотические алгоритмы метода функциональных параметров — алгоритмы упорядоченной итерации	45
Глава 5. Метод функциональных параметров в системах, описываемых интегральными уравнениями	47
§ 5.1. Общие сведения	47
§ 5.2. Метод функциональных параметров в гидродинамике подводного крыла	47
§ 5.3. Теория потенциала ускорений и метод функциональных параметров	51
Глава 6. Метод пространства малого времени	57
§ 6.1. Общие соотношения метода	57
§ 6.2. Задача Коши в пространстве малого времени	58
§ 6.3. Задача Коши для уравнения в частных производных	65
§ 6.4. Решение нелинейных функциональных уравнений	69
§ 6.5. Представление функций в пространстве малого времени	82
Раздел III. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ И МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ	
Глава 7. Элементы асимптотического программирования	85
§ 7.1. Общие сведения. Структура пространства управлений	85
§ 7.2. Структура алгоритмов асимптотического программирования. Семейство функционалов, зависящих от параметра	88
§ 7.3. Выбор оптимального управления на основе уравнений динамического программирования методом пространства малого времени	89
§ 7.4. Асимптотическое разложение общего функционала по шкале малого времени	96
§ 7.5. Теоремы асимптотического принципа оптимальности	98
§ 7.6. Предельная корректность и асимптотические особые управления	108
§ 7.7. Асимптотический принцип оптимальности и необходимые условия экстремума	112
§ 7.8. Простейшие примеры	113
§ 7.9. Выделение линейно-независимых элементов из набора u_{np}	115
§ 7.10. Синтез оптимальных управлений в линейной системе на основе асимптотического принципа оптимальности	122
§ 7.11. Синтез оптимального управления нелинейными системами на основе асимптотического принципа оптимальности	129
§ 7.12. Асимптотический метод выбора оптимального управления в задаче жесткого слежения по траектории	133
Глава 8. Классы предельной корректности в задачах математической физики	139
§ 8.1. Компактные классы корректности	139
§ 8.2. Классы предельной корректности в задачах для параболических уравнений	143
§ 8.3. Связь метода функциональных параметров в спектральном классе корректности с методом Фурье	147
§ 8.4. Примеры	148
§ 8.5. Задача Коши для уравнения Лапласа	152

§ 8.6. Связь с методом Бергмана	155
§ 8.7. Нелинейная задача нестационарного теплообмена и фильтрации	155
Глава 9. Приложение теории предельной корректности к задачам теории потенциала ускорений (метод разделения решений в теории аperiодических движений несущей поверхности)	160
§ 9.1. Общие сведения	160
§ 9.2. Постановка задачи об аperiодическом движении несущей поверхности в жидкости	162
§ 9.3. Формализм асимптотического метода первого уровня корректности	164
§ 9.4. Плоская задача об аperiодических движениях тонкого крыла	167
§ 9.5. Формализм метода разделения решений	171
§ 9.6. Метод разделения решений в плоской задаче об аperiодическом движении тонкого крыла в безграничной жидкости	176
§ 9.7. Задача Вагнера	179
§ 9.8. Преобразование интегрального уравнения плоской задачи. Формулы для усилий, действующих на крыло в нестационарном потоке	180
§ 9.9. Плоская несущая поверхность	182
§ 9.10. Крыло малого удлинения	183
§ 9.11. Крыло произвольного удлинения	184
§ 9.12. Асимптотический метод решения интегральных уравнений крыла в нестационарном потоке	188
§ 9.13. Окончательное согласование приближенной модели крыла большого размаха. Формулы для коэффициента подъемной силы	189
Раздел IV. АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ	
Глава 10. Метод усреднения	193
§ 10.1. Общие сведения	193
§ 10.2. Метод Ван-дер-Поля	194
§ 10.3. Основные идеи метода усреднения	196
§ 10.4. Формализм метода усреднения	199
§ 10.5. Теорема Н. Н. Боголюбова	201
Глава 11. Методы ВКБ и ПЛГ	202
§ 11.1. Основы метода ВКБ	202
§ 11.2. Особые случаи в методе ВКБ	206
§ 11.3. Идея деформированных координат в методе ПЛГ	208
Глава 12. Усеченные асимптотические алгоритмы и задача полной аппроксимации	211
§ 12.1. Задача полной аппроксимации в теории умеренных возмущений	211
§ 12.2. Метод полной аппроксимации в теории околосзвуковых течений газа	217
§ 12.3. Метод полной аппроксимации в нелинейной теории несущей поверхности	220
	239

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	225
1. Идея функциональных преобразований — одна из основных идей теории асимптотических методов	225
2. Еще раз о шкале сравнения	227
3. Уровни предельной корректности	228
4. Классификация асимптотических методов и алгоритмов	228
5. Метод функциональных параметров и теория предельной корректности	229
ЛИТЕРАТУРА	232

Анатолий Николаевич ПАНЧЕНКОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОРРЕКТНОСТИ

Утверждено к печати

Сибирским энергетическим институтом СО АН СССР

Редактор *Ю. Г. Тихомирова*

Художник *В. К. Балабанова*

Художественный редактор *Т. П. Поленова*

Технический редактор *А. М. Сатарова*

Корректоры *Е. И. Корневская, Н. М. Луковцева*

Сдано в набор 15/XII 1975 г. Подписано к печати 8/IV 1976 г. Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 14,3. Тираж 2750 экз.
Т-00694. Тип. зак. 4786. Цена 93 коп.

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21.

2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

93 коп.

